1. Gerið ráð fyrir að „a priori" sé p betadreift, $B(\alpha, \beta)$. Framkvæmd er skoðanakönnun þar sem líkur á „já" eru p. Random úrtak n mælinga, $x_1, \ldots, x_n$ er tekið. Notið reglu Bayes til að leiða út a „posteriori dreifingu" fyrir p.

2. Leiðið út LAD (least-absolute-deviance) mat á $\mu = E(X)$ ef gefið er random úrtak úrtak, $x_1, \ldots, x_n$. Ef líkindadreifingin er Laplace (double-exponential), hvert er þá maximum-likelihood matið.

3. Hending X hefur þéttifall:

   $$f(x) = cx^{\alpha} \quad \alpha > -1, 0 < x < 1$$

   Finnið fastann c. Finnið dreifingu $Y = 1/X$.

4. Gefið að $X_1, \ldots, X_n$ eru óháðar einsdreifðar með þéttifall:

   $$f(x) = cx^{\alpha} \quad \alpha > -1, 0 < x < 1$$

   Leiðið út metil mesta sennileika (MLE=maximum-likelihood-estimator) fyrir α. Leiðið út MM (method-of-moments) metil fyrir α. Leiðið út upplýsingafallið (Information fall) fyrir α. Hversu nákvæmlega er hægt að álykta um α út frá random úrtaki af n mælingum. Giskið á nafn á dreifingu MLE-metilsins. Hver dreifing MLE-metilsins í stórum úrtökum?

5. Gefin er eftirfarandi útkoma úr regression. Breytan y er skýrð með x_1, x_2 og fasta. Fjöldi mælinga er N=25, og $\mathbf{e}'\mathbf{e} = 33$. Líkanið, $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$ er metið og út kemur:

   $$\hat{y} = 0.73 - 0.32x_1 + 0.68x_2$$
   $$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.063 & -0.028 & 0.026 \\ 0.028 & 0.041 & -0.024 \\ 0.026 & -0.024 & 0.044 \end{bmatrix}$$

   Gerið grein fyrir hvaða tölfræðipróf koma til greina við ályktanir hér og hvaða forsendur liggja að baki slíkum prófum. Setjið upp próf sem prófar $\beta_1 + \beta_2 = 0$.

6. Hending Y er χ^2 dreifð með ν frígráður. Hér er ν óþekkt. Leiðið út method-of-moment metil fyrir ν ef fyrir hendi er random úrtak, $Y_1, \ldots, Y_n$. Stingið upp á útfærslu af GMM aðferð til að meta ν.

7. Skoðið eftirfarandi jöfnukerfi.

$$
\begin{aligned}
y_t &= \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 x_{t-1} + \varepsilon_t \\
x_t &= \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 x_{t-1} + \epsilon_t
\end{aligned}
$$

   (a) Ef x_t og y_t eru stationary ferli stingið upp á aðferð til að álykta um orsakatengsl milli breytanna.

   (b) Stingið upp á aðferð sem gerir ráð fyrir þeim möguleika að x_t og y_t séu non-stationary en að hugsanlegt jafnvægi sé á milli þeirra. (Hér má taka dæmi, t.d. að x_t sé erlent olíuverð og y_t sé innlent olíuverð)

8. Skýrið fyrirbærið „simultaneous-equation-system". Notið eftirfarandi dæmi til að skýra málið:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \gamma_1 y_2 + \beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2 + \beta_{13} x_3 + \varepsilon_1 \\
y_2 &= \gamma_2 y_2 + \beta_{21} x_1 + \beta_{22} x_2 + \beta_{13} x_3 + \varepsilon_2 \\
V &\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

   Hvernig geta fyrirfram ákveðin skilyrðin eins og t.d. $\gamma_1 = 0$, $\beta_{13} = \beta_{12} = 0$, $\sigma_{12} = 0$ o.s.frv. haft á ályktanir um svona líkan? Rökstyðjið val á mataðferð fyrir líkan af þessari gerð.

9. Gerið ráð fyrir að $X_1, \ldots, X_n$ sé random úrtak. Dreifingunni er stýrt með parameter θ. Þéttifallið er:

$$
f(x|\theta) = \theta x^{-2} \quad \theta \leq x < \infty
$$

   Finnið a) maximum-likelihood metil fyrir θ, finnið b) method of moment metil fyrir θ.

10. Gerið ráð fyrir að $X_1, \ldots, X_n$ sé random úrtak. Dreifingunni er stýrt með parameter θ.

Ef θ=0 þá:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1 & \text{ef } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

og ef θ=1 þá:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1/(2\sqrt{x}) & \text{ef } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Finnið maximum-likelihood metil fyrir θ.

11. Berið saman eftirfarandi niðurstöður úr ARIMA(0,1,0)-(0,1,1)-(Season=4) og ARIMA(3,1,3)-(0,1,1)-(Season=4). Hver eru t-gildi parametra og hvað þýða þau? Borgar sig að stækka líkanið hér?

sma1 -0.7024

Approx standard errors: sma1 0.0845

σ^2 estimated as 0.0001460: log likelihood = 367.32, aic = -732.64

og

ar1	ar2	ar3	ma1	ma2	ma3	sma1
0.2341	-0.4585	0.6627	-0.1118	0.5988	-0.6918	-0.7487

Approx standard errors:

ar1	ar2	ar3	ma1	ma2	ma3	sma1
0.2647	0.1356	0.2063	0.2625	0.1510	0.2583	0.0992

σ^2 estimated as 0.0001334: log likelihood = 371.05, aic = -728.1

12. Finnið sjálffylgnifall fyrir ferlið:

$$y_t = \mu + \varepsilon_t + 0.4\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2}$$

13. Hugleiðing um ólínuleg líkön. Gefin eru eftirfarandi ferli:

a) $Y_t = \epsilon_t - \beta\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}$

b) $X_t = \sigma_t v_t$

ϵ_t og v_t eru hvít suð N(0,1), en

$\sigma_t^2 = \gamma + \alpha \, x_{t-1}^2$

Sýnið að a) og b)(ARCH-ferlið) eru hvít suð (í veikum skilningi). Sýnið að besta línulega spá er 0 fyrir bæði ferlin. Sýnið að til er betri spá en 0 fyrir a). Gerið grein fyrir að mean-square-error of prediction í ARCH ferlinu er háður fortíðinni. (Athugasemd, þarf ekki að nota í dæmi: Með því að skrifa

$X_t^2 = \sigma_t^2 + (X_t^2 - \sigma_t^2)$

má sjá að ARCH ferlið er AR(1) fyrir annað veldið.) Segið lauslega frá hvernig ARCH líkanið hegðar sér í hagmælingum.

14. Eftirfarandi tafla er útkoma úr Johansen co-integration forritinu CATS. Breyturnar eru skilgreindar á eftirfarandi hátt (allar tölur í logaritmum).

A = meðalverðlag í viðskiptalöndum

B = íslenskt verðlag

C = gengi

D = laun

E = M3 (peningmagn)

F = innflutningur

G = útflutningur

Ræðið aðferðafræðina. Hvaða forsendur eru nauðsynlegar. Túlkið útkomuna. Hvaða co-integrating sambanda gæti maður vænst? Reynið að gefa hagræna túlkun.

TABLE 1. OUTPUT OF COINTEGRATION ANALYSIS (OUTPUT OF CATS)

Endogeneous series : A B C D E F G

Deterministic series :

Unrestricted constant

Sample : 1972:01 TO 1990:04 Lag(s) in VAR-model : 4 No. of observations : 72 Obs.- no.of variables: 43

STANDARD I(1) ANALYSIS

EIGENVALUES	L-MAX	TRACE	H_0 : r=
0.4838	47.6127	153.6235	0
0.4110	38.1058	106.0107	1
0.2473	20.4574	67.9049	2
0.2177	17.6764	47.4475	3
0.1830	14.5530	29.7711	4
0.1545	12.0795	15.2181	5
0.0427	3.1386	3.1386	6

BETA (transposed)

A	B	C	D	E	F	G
3.593	-13.365	18.789	15.114	-8.976	-11.062	3.814
11.305	-0.521	-17.712	-35.467	21.517	11.540	9.725
-3.026	34.231	-6.576	-12.156	-0.384	-13.477	-0.466
-43.836	34.402	-14.256	9.733	-13.951	-4.616	-3.153
49.918	-16.721	-3.815	-18.794	14.470	10.964	-0.497
-11.350	-9.536	4.347	9.110	-14.340	8.237	5.960
-33.235	23.640	-4.055	-7.527	-4.523	2.848	-3.414

ALFA

0.002	0.001	-0.001	0.001	-0.001	0.000	-0.000
0.004	-0.006	-0.009	-0.002	0.004	-0.003	-0.001
-0.013	-0.010	0.000	0.003	0.005	-0.008	-0.005
0.004	0.006	-0.005	0.001	0.011	-0.001	-0.000
0.010	-0.004	0.002	-0.002	0.001	0.003	-0.001
0.029	0.012	0.002	-0.002	0.003	-0.019	-0.005
0.059	-0.043	0.002	0.025	0.022	-0.007	0.004

PI

A	B	C	D	E	F	G
-0.046	-0.011	0.010	0.027	-0.020	-0.011	0.017
0.322	-0.473	0.239	0.266	-0.027	0.022	-0.046
0.209	0.184	-0.157	0.043	0.075	-0.014	-0.192
0.605	-0.357	-0.073	-0.305	0.253	0.206	0.066
0.168	-0.243	0.296	0.267	-0.165	-0.129	0.027
0.845	-0.369	0.269	-0.246	0.370	-0.336	0.141
-0.302	-0.046	1.365	2.106	-1.390	-1.088	-0.341

SOME STATISTICS ON THE ENDOGENOUS SERIES

MEAN	STD.DEV	MAXIMUM	MINIMUM
0.01756846	0.00009214	0.04043700	0.00111500
0.07736347	0.00176905	0.20800800	0.00905000
0.05968325	0.00350516	0.19696800	-0.05328300
0.07768404	0.00175646	0.19367700	-0.00621000
0.08629563	0.00142376	0.19222000	0.01911000
0.08611933	0.01933139	0.35720500	-0.26180300
0.08823629	0.07799107	0.82185600	-0.45829200

********* RESIDUAL ANALYSIS **********

Correlation matrix

DA DB DC DD DE DF DG

1.000000

0.111740 1.000000

-0.052861 0.471158 1.000000

0.066599 0.492758 0.171017 1.000000

0.209953 0.185316 -0.117419 0.092164 1.000000

0.297156 0.383221 0.351106 0.253288 0.088194 1.000000

0.114360 0.318266 0.097407 0.365583 0.336946 0.218495 1.000000

Standard deviations of residuals

0.004066 0.021526 0.037218 0.026391 0.016170 0.059824 0.106872

MULTIVARIATE STATISTICS

LOG(DET(SIGMA)) = -52.17615 INFORMATION CRITERIA: SC = -40.11833 HQ = -43.98187 TRACE CORRELATION = 0.66175

TEST FOR AUTOCORRELATION Ljung-Box(18) = 869.054 p-val = 0.00 LM(1), CHISQ(49) = 101.934 p-val = 0.00 LM(4), CHISQ(49) = 86.537 p-val = 0.00

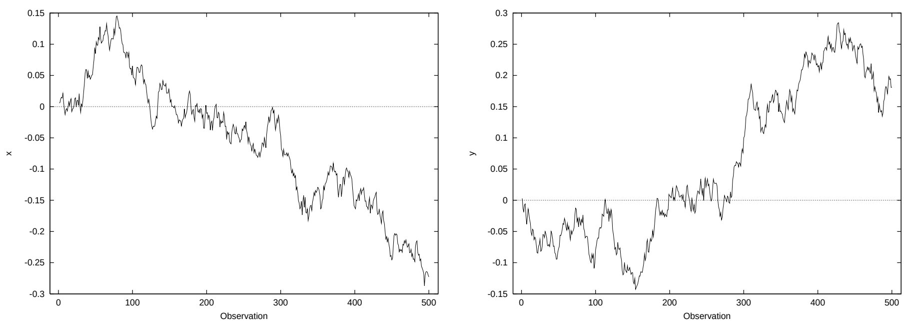
TEST FOR NORMALITY SKEWNESS, DGF(7) = 11.036 p-val = 0.14 KURTOSIS DGF(7) = 2.773 p-val = 0.91 OVERALL DGF(14) = 13.809 p-val = 0.46

UNIVARIATE STATISTICS

MEAN	STD.DEV	MAXIMUM	MINIMUM	R-squared
0.00000000	0.00406600	0.00852444	-0.00847578	0.82058037
0.00000000	0.02152629	0.05689451	-0.05203829	0.73806168
-0.00000000	0.03721766	0.10339950	-0.07446002	0.60482377
-0.00000000	0.02639103	0.08060056	-0.06170425	0.60347048
-0.00000000	0.01617004	0.03590462	-0.04034591	0.81635260
-0.00000000	0.05982433	0.15976100	-0.13611105	0.81486324
0.00000000	0.10687208	0.24104077	-0.34148518	0.85355194

L-B.Q(18)	ARCH(4)	Skewness	Ex.Kurtosis	Normality
17.258	3.969	0.015	-0.574	0.313
14.040	2.478	-0.001	-0.112	0.368
9.052	6.347	0.476	-0.117	3.286
16.000	0.262	0.388	0.416	2.406
16.492	2.364	0.172	-0.474	0.721
28.431	4.933	0.309	0.241	1.681

15. Breyturna x_t og y_t hafa verið mældar á 500 tímapunktum. Ferla mælinganna á sjá á mynd 1. Við höfum áhuga á hugsanlegum tenglum x_t og y_t og því hefur verið framkvæmd aðhvarfsgreining. Niðurstöður hennar eru sýndar í töflu 1. Tjáið ykkur um hugsanlegt samband breytanna.



Mynd 1: 500 mælingar á x og y.

Niðurstöður úr regression forriti: OLS mat sem byggir á 500 mælingum
Háð breyta: y

Variable	Coefficient	Std. Error	t-statistic	p-value
const	−0.00331	0.00338	−0.983	0.326
x	−1.023	0.0299	−35.28	0.000

Mean of dependent variable	0.0567
S.D. of dependent variable	0.122
Sum of squared residuals	2.119
Standard error of residuals ($\hat{\sigma}$)	0.0652
Unadjusted R^2	0.7143
Adjusted $\bar{R}^2$	0.7137
$F(1, 498)$	1244.93
Durbin–Watson statistic	0.046
First-order autocorrelation coeff. ($\hat{\rho}$)	0.979

Tafla 1: Niðurstöður aðhvarfsgreiningar

16. Afgangsliðirnir í dæminu á undan $\hat{u}_t$ voru athugaðir og eftirfarandi jafna var metin (staðalfrávik í svigum):

$$\begin{array}{llllll}\Delta\hat{u}_t = & -0.0003867+ & 7.74279E-07t+ & -0.024393\hat{u}_{t-1}+ & 0.05074\Delta\hat{u}_{t-1}+ & 0.0532 \\ & (0.00130) & (4.52833E-06) & (0.0102) & (0.0452) & (0.045\end{array}$$

Hér er $\Delta\hat{u}_t = \hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}$ og $t = 1, 2, 3, \ldots$. F-prófstærðin fyrir kenninguna að stuðlarnir við $\hat{u}_{t-1}$ og t séu samtímis 0 er 2.95. Skýrið hvers vegna einhverjum gæti dottið í hug að meta þessa jöfnu. Gefa þessar niðurstöður eitthvað til viðbótar við dæmið á undan? Er eitthvað annað sem hugsanlega ætti að reikna hér?

17. Hugleiðing um ólínuleg líkön. Gefin eru eftirfarandi ferli:

a) $Y_t = \epsilon_t$ - $\beta\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}$

b) $X_t = \sigma_t v_t$

ϵ_t og v_t eru hvít suð N(0,1), en

$\sigma_t^2 = \gamma + \alpha\, x_{t-1}^2$

Sýnið að a) og b)(ARCH-ferlið) eru hvít suð (í veikum skilningi). Sýnið að besta línulega spá er 0 fyrir bæði ferlin. Sýnið að til er betri spá en 0 fyrir a). Gerið grein fyrir að mean-square-error of prediction í ARCH ferlinu er háður fortíðinni. (Athugasemd, þarf ekki að nota í dæmi: Með því að skrifa

$X_t^2 = \sigma_t^2 + (X_t^2 - \sigma_t^2)$

má sjá að ARCH ferlið er AR(1) fyrir annað veldið.) Segið lauslega frá hvernig ARCH líkanið hegðar sér í hagmælingum.

18. Fyrir hendi eru mælingar á tímaröð, $x_1, \ldots, x_T$. Eftir að logaritmi hefur verið tekinn eru reiknaðar nokkrar lýsandi stærðir.

	x_t	$x_t - x_{t-1}$	$x_t - x_{t-4}$	$(x_t - x_{t-1}) - (x_{t-4} - x_{t-5})$
mean	26.49	0.0149	0.0586	0.0005
standard deviation	0.5888	0.02952	0.02769	0.01415

Gögnum er einnig lýst grafískt í mynd 2, sjálffylgniföll eru gefin í mynd 3 og hlutsjálffylgniföll í mynd 4.

Rökstyðjið hvernig þið mynduð halda áfram ARIMA líkanagerð í anda Box-Jenkins. Segið hvaða upplýsingar í viðbót væri æskilegt að hafa og giskið á það sem vantar.

19. Gefið er slembiúrtak úr exponential dreifingu, $x_1, \ldots, x_n$. Finnið ML-mat á væntanlegu gildi dreifingarinnar og asymptótíska dreifingu ML-metilsins.

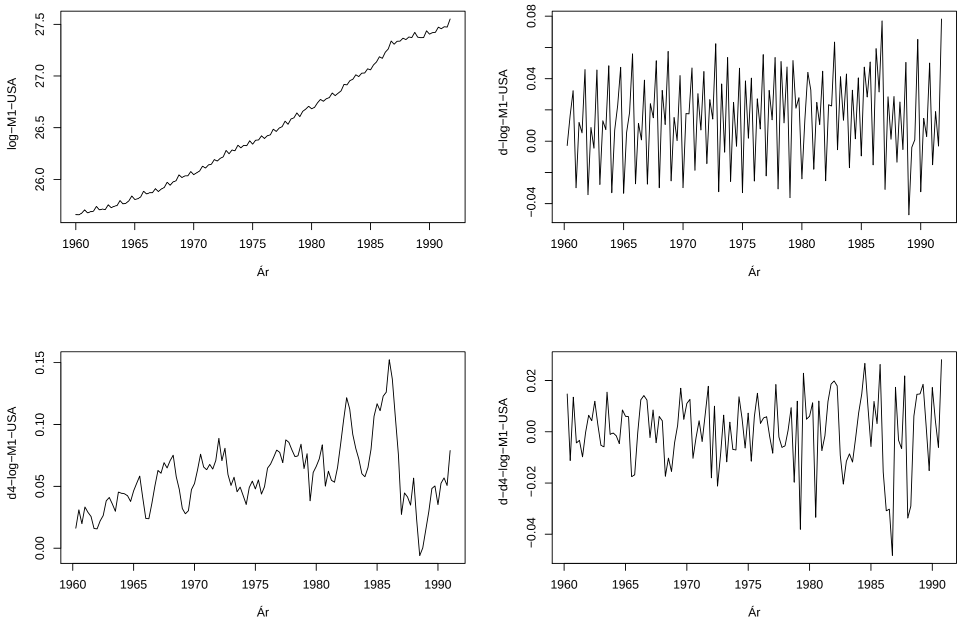
20. Leiðið út sjálffylgnifall MA(2) ferlis.

21. Gefið er eftirfarandi tvívítt þéttifall:

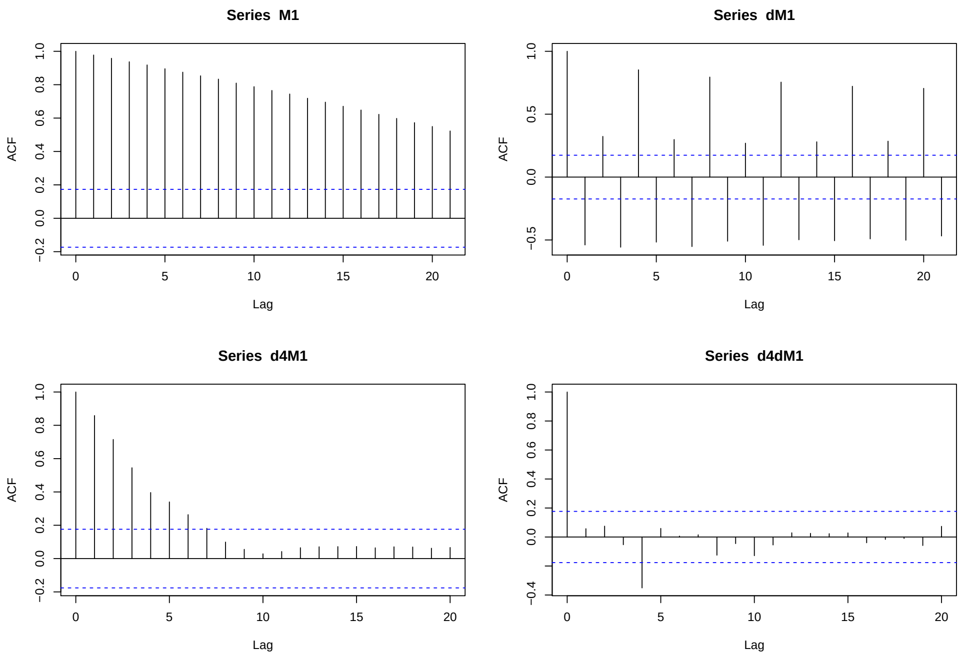
$$f(x, y) = 2x \qquad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$$

Reiknið $P(X^2 < Y < X)$.

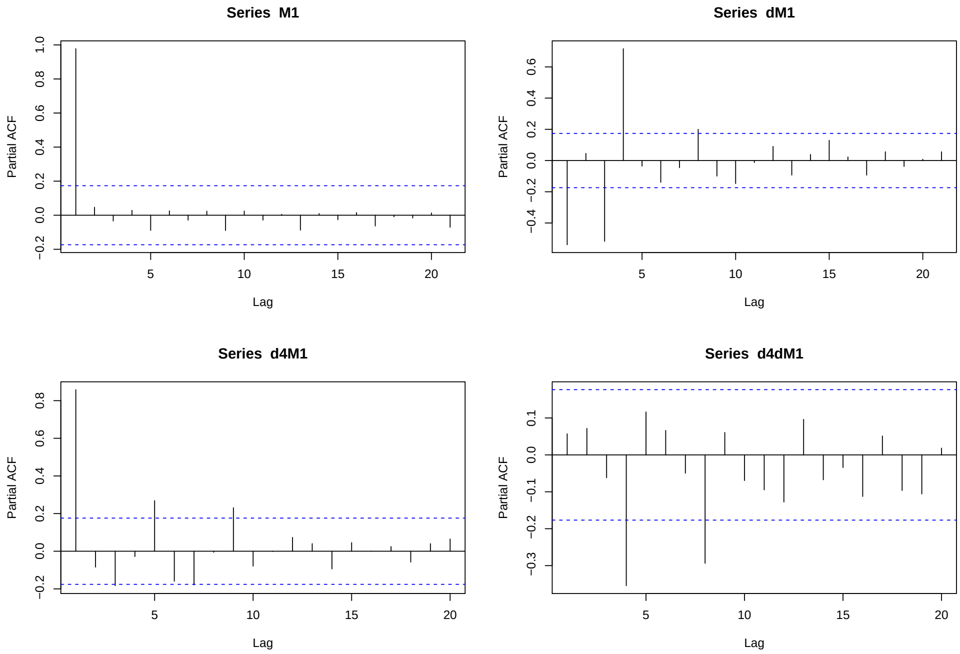
22. Gefið er að $X \sim N(0, 1)$. Skilgreinið $Y = X^2 - 1$. Reiknið fylgni X og Y. Eru X og Y óháðar?



Mynd 2: M1 fyrir USA



Mynd 3: Sjálffylgniföll fyrir M1



Mynd 4: Hlutsjálffylgniföll

23. Gefið er random úrtak, $X_1, \ldots, X_n$, úr drefiningu með þéttifall

$$f(x|\theta) = \theta x^{-2} \quad \text{fyrir } \theta \leq x < \infty$$

Finnið a) maximum-likelihood metil fyrir θ, b) method of moment metil fyrir θ.

24. Gefið er random úrtak, $X_1, \ldots, X_n$, úr Paretodreifingunni,

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}} \quad \theta > 0, \quad x > 1$$

Finnið likelihood-ratio prófstærð fyrir kenningaprófunina $H_0 : \theta = 1$ gegn $H_1 : \theta \neq 1$.

25. Ef Z er stöðluð normalhending, skilgreinið $X = max(|Z|, 1/|Z|)$. Hvaða gildi getur X tekið? Finnið dreifingu X.

26. X er hending þannig að:

$$P(X = i) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{ef } i = 1, i = 0, i = -1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Reiknið fylgni X og X^2. Eru X og X^2 óháðar?

27. Ef X er exponential dreifð. Finnið dreifingu $1/X$. Reiknið $E(X)$ og $E(1/X)$.

28. Ef X og Y eru óháðar exponential með sama meðaltal, $1/\lambda$, finnið: a) dreifingu $U = X \cdot Y$ og b) $V = exp(-\lambda X) + exp(-\lambda Y)$.

29. Ef X_1, ... , X_n er random úrtak úr exponential dreifingu, leiðið út prófstærð fyrir a) likelihood-ratio próf, b) Wald-próf, c) Lagrange-multiplier (score) próf fyrir:

$$H_0 : \lambda = 2 \text{ gegn } H_1 : \lambda \neq 2$$

30. Ef X_1, ... , X_n er random úrtak úr dreifingu með eftirfarandi þéttifall:

$$f(x) = \theta x^{-2} \qquad 0 < x < \infty$$

a) Finnið maximum-likelihood metil fyrir θ. b) Skýrið vandkvæði við method-of-momemts metil fyrir θ.

31. Gerið ráð fyrir að $X_1, \ldots, X_n$ sé random úrtak. Dreifingunni er stýrt með parameter θ.

Ef θ=0 þá:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1 & \text{ef } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

og ef θ=1 þá:

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1/(2\sqrt{x}) & \text{ef } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Finnið maximum-likelihood metil fyrir θ.

32. Gefið er að X fylgir Pareto dreifingu:

$$F(x) = 1 - \frac{x_0^\alpha}{x^\alpha} \quad 1 \leq x_0 \leq x$$

Finnið dreifingu $Y = log(X)$

33. Gefið er random úrtak úr beta dreifingu, $B(\theta_1, \theta_2)$. Gefið er að $\theta_2 = 1$. Leiðið út likelihood-ratio prófstærð fyrir kenninguna $H_0 : \theta_1 = 1$.

34. Skrifið niður likelihood fall (gangið út frá normal-dreifingu) fyrir MA(1)-ferli þar sem framkvæmdar hafa verið 2 mælingar, x_1, x_2. Reiknið bestu spá fyrir x_3.

35. Gerið ráð fyrir að venjulegar forsendur séu uppfylltar og meta á eftirfarandi líkan út frá n mælingum:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_{k-1} X_{k-1} + \varepsilon \quad V(\varepsilon) = \sigma^2$$

Sýnið að dreifing $(\beta_1 - b_1)/s_{\beta_1}$ er t-dreifing. Hér er s_{β_1} standard-error matsins á β_1 (staðalfrávik metilsins $\hat{\beta}_1$).

36. Skýrið hvernig mætti hanna metil sem leiðréttir fyrir misdreifni í eftirfarandi líkani:

$$y_t = \boldsymbol{x}_t' \boldsymbol{\beta} + u_t$$

Þar sem gefið er að u_t eru óháðar hendingar með meðaltal 0 og $V(u_t) = exp(\alpha z_t)$ þar sem z_t er mæld breyta.

37. Eftirfarandi niðustöður hafa fengist úr 1000 mælingum á logit-líkani.

Variable	Coefficient	Std. Error	t	Prob >|t|	Mean
union					0.216
potexp	0.147	0.028	5.25	0.00	18.88
exp2	-0.00268	0.00056	-4.752	0.00	519.88
grade	- 0.070	0.032	-2.188	0.029	13.01
married	0.115	0.196	0.587	0.557	0.641
high	0.980	0.180	5.444	0.00	0.568
const.	-2.58	0.519	-4.977	0.00	1

Log-likelihood= -475.554

Hlutverk líkanins er að skýra út aðsókn að verkalýðsfélögum. Túlkið parametermatið við breytuna „married". Skýrið lauslega hvernig parametermöt eru fengin. Greiningin er endurtekin en nú er sleppt breytunum „potexp" og „exp2" er sleppt og þá fæst eftirfarandi:

Variable	Coefficient	Std. Error	t
union			
grade	-0.069	0.030	-2.32
married	0.545	0.177	3.076
high	1.029	0.178	5.794

Log-likelihood=-491.531

Setjið fram og prófið kenninguna að parametrarnir við breyturnar sem sleppt var séu 0.

38. Gangið út frá iid úrtaki, $X_1, \ldots, X_n$ úr Bernoulli dreifingu, $E(X_i) = p$. Reiknið log-likelihood fallið.

39. Gangið út frá iid úrtaki, $X_1, \ldots, X_n$ úr Bernoulli dreifingu, $E(X_i) = p$. Finnið MLE metil.

40. Gangið út frá iid úrtaki, $X_1, \ldots, X_n$ úr Bernoulli dreifingu, $E(X_i) = p$.Setjið $p = p_0$ og $p = \hat{p}_{ML}$ inn í log-likelihood fallið, finnið mismun gildanna og marfaldið með 2.

41. Gangið út frá iid úrtaki, $X_1, \ldots, X_n$ úr Bernoulli dreifingu, $E(X_i) = p$. Reiknið score-fallið.

42. Gangið út frá iid úrtaki, $X_1, \ldots, X_n$ úr Bernoulli dreifingu, $E(X_i) = p$. Reiknið Fischer information fallið.

43. Gerið ráð fyrir að $X_1, \ldots, X_n$ sér iid úrtak þar sem:

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 + \theta x) \quad \text{þar sem} \; -1 < x < 1 \quad -1 < \theta < 1$$

Finnið consistent metil fyrir θ og sýnið að hann sé consistent.

44. Ef $X_1, \ldots, X_n$ er iid úr dreifingu sem er þannig að ef $\theta = 0$ þá er :

$$f(x) = 1 \quad \text{ef } 0 < x < 1$$

og ef $\theta = 1$ þá er:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{ef } 0 < x < 1$$

Hendingin X getur bara tekið gildi á milli 0 og 1. Finnið maximum-likelihood metil fyrir θ.

45. $X_1, \ldots, X_n$ er random úrtak úr Bernoulli dreifingu. $P(X_i = 1) = p$ og $P(X_i = 0) = 1 - p$. Prófa á kenninguna $H_0 : p = p_0$. Reiknið:

- LR (likelihood-ratio) prófstærð.
- Wald prófstærð.
- Lagrange-multiplier (score-test) prófstærð.