- Líkan er blanda af mælingum $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ og ómældum stærðum $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$.
- Gengið er út frá því að gildin á $\boldsymbol{\theta}$ ákvarði hvernig $\boldsymbol{y}$ hafi myndast.
- Verkefni tölfræðinnar er að giska á $\boldsymbol{\theta}$ út frá $\boldsymbol{y}$.
- Nokkur prinsíp við slíkar ágiskanir:
  1. Að reiknað $\boldsymbol{y}$ farir nálægt mældum $\boldsymbol{y}$. T.d. least-squares (rúmfræðileg aðferð).
  2. Að væntanlegt gildi random vektorsins $\boldsymbol{Y}$ sé fall af $\boldsymbol{\theta}$ og leysa síðan jöfnur byggðar á mælingunum $\boldsymbol{y}$, fyrir $\boldsymbol{\theta}$. Þetta er kallað method-of-moments (MM). Hagfræðingar hafa fengið Nóbelsverðlaun fyrir GMM. (líkindafræðileg aðferð)
  3. Maximum-likelihood, (mesti sennileiki). Sennileikafallið er fall af $\boldsymbol{\theta}$. Það skilgreint:
  $$L(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\theta}).$$
  Ágiskunin $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{y})$, þ.e. það gildi á $\boldsymbol{\theta}$ sem hefur mælda útkomu sem líklegasta gildi (líkindafræðileg aðferð).
  4. Bayes-aðferðir, lít á $\boldsymbol{\theta}$ sem random-breytu, veg saman prior (fordóma) og likelihood með reglu Bayes til að fá posterior (líkindafræðileg aðferð).

Verkefni hagrannsóknarmannsins

- Tengja saman vandamál og líkan, skilja líkan.
- Skoða mælingar og giska á $\boldsymbol{\theta}$. Giskið getur verið áhugavert í sjálfu sér og einnig má nota það til að giska á y-gildi, þ.e. spár.
- Gera sér grein fyrir eiginleikum ágiskana.
- Mikilvægt að gera mun á skilgreiningarvanda og tæknivanda. Með skilgreiningu er t.d. átt við val á líkindadreifingu. Með tæknivanda er t.d. átt við hvernig skuli leysa einhverjar jöfnur, hámarka föll, gera hermanir o.s.frv.
- Þetta er hagnýting á stærðfræðigreinunum, rúmfræði og líkindafræði. Önnur hagnýting á líkindafræði er t.d. ákvarðanafræði (decision-theory).

Aðeins meira um co-integrationi

Segjum að:

$$x_t = \sum_0^t \varepsilon_s,$$
$$y_t = \sum_0^t \epsilon_s,$$

Hér verða x_t og y_t I(1) ferli. Ef x_t og y_t eru co-integrated, þ.e. til fall f, þannig að $f(x_t, y_t)$ sé stationary þurfa $\sum_0^t \varepsilon_s$ og $\sum_0^t \epsilon_s$ í einhverju skilning að vera sama ferlið. Þ.e. til er common-(stochastic)-trend.

Margar víddir (Johansen)

- Samanburður við unit-root próf í einni vídd. Þá er verið að álykta um tengsl ΔX_t og X_{t-1}. Í mesta lagi einn fylgnistuðull.
- Í mörgum víddum er verið að gera svipað (sbr. bók bls 435). Þ.e. verið er að álykta um tengsl $\Delta \boldsymbol{X}_t$ og $\boldsymbol{X}_{t-1}$.
- Jöfnur 8.40 og 8.41 í bók:

$$\Delta \boldsymbol{X}_t = \text{ýmsir liðir} + \boldsymbol{u}_t,$$
$$\boldsymbol{X}_{t-1} = \text{ýmsir liðir} + \boldsymbol{v}_t.$$

  Ályktun byggir á canónískum fylgnistuðlum $\boldsymbol{u}_t$ og $\boldsymbol{v}_t$. Ef vídd vektorann er k eru fylgnistuðlar(eigingildi) frábrugðin 0 $r < k$.

- Johansen ofl. leiddu út (asymptótískar)-dreifingu slíkra stuðla. Sú dreifining er frábrugðin því sem er í hefðbundinni margvíðri greiningu á stationary ferli.

Um samfelldan tíma kafli 6

- Random-walk í samfelldum tíma. Wiener-ferli, Brownian-motion. Nota $W(t)$.
  1. $W(0) = 0$,
  2. $V(W(t)) = \sigma^2 t$,
  3. Ef $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ þá er $W(t_4) - W(t_3)$ óháð $W(t_2) - W(t_1)$,
  4. $W(t)$ er samfellt fall af t.
- Einnig gildir að $W(t)$ $N(0, \sigma^2 t)$ og ef $s < t$, $E(W(t)|W(s)) = W(s)$.

$W(t)$ borið saman við Poisson, $N(t)$

- $N(t)$ fer allra sinna ferða í hoppum af stærðinni 1.
  1. $N(0) = 0$,
  2. $P(N(t + dt) = N(t) + 1) = \lambda dt$, (fyrir mjög lítil dt),
     $P(N(t + dt) > N(t) + 1) \simeq 0$.
  3. Ef $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ þá er $N(t_4) - N(t_3)$ óháð $N(t_2) - N(t_1)$,
  4. $E(N(t)) = V(N(t)) = \lambda t$.
- $N(t)$ er Poisson með væntanlegt gildi λt.

Hreyfimynstur í samfelldum tíma

- Í strjálum (discrete) tíma höfum við, t.d. AR(1):

$$\Delta X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t \text{ eða}$$
$$\Delta X_t = \alpha X_{t-\Delta t} + \varepsilon_t$$

  Slembin mismunajafna.
- Vil skrifa eitthvað svipað í samfelldum tíma, þ.e.

$$dX(t) = \cdots ,$$

  á að þýða eitthvað.
- Uppástunga:

$$dX(t) = \underbrace{\mu(X(t), t)dt}_{A} + \underbrace{\sigma(X(t), t)dW(t)}_{B}, \text{ þ.e.}$$
$$X(t + dt) = \underbrace{\int^t \mu(X(s), s)ds}_{A} + \underbrace{\int^t \sigma(X(s), s)dW(s)}_{B}.$$

  dt mjög lítið.

Skilgreiningar

- A er fyrirsjáanlegur hluti, B er random-hluti. Skilgreining á A liggur beint við.
- Ein leið að skilgreina B er að W sé Wiener-ferli og notast við Ito-integralið.

$$\text{Ef } 0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t$$

$$\int_0^t \sigma(x(s), s) dW(s) = \sum_{j=1}^{n} \sigma(x(t_{j-1}), t_{j-1})[W(t_j) - W(t_{j-1})]$$

Þetta gildir ef σ er skikkanlegt fall. Takið eftir að fallið σ er reiknað út í vinstra punkti bilsins, (t_{j-1}, t_j). Önnur skilgreining á stochastic-integral er Stratonovich-integralið.

- Lokahnykkur skilgreiningarinnar er að tekið er markgildi þannig að $t_0 < \cdots < t_n$ verður sífellt þéttair skipting á bilinu $(0, t)$, þ.e. $\Delta_t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Hvers vegna lærum við þetta?

- Það getur verið áhugavert í sjálfu sér að vinna með samfelld tíma líkön.
- Ímyndum okkur að hreyfimynstrið sé á forminu:

$$X(t) = \underbrace{\int^t \mu(X(s), s)ds}_{A} + \underbrace{\int^t \sigma(X(s), s)dW(s)}_{B}.$$

- Get safnað gögnum og reynt að giska á μ og σ. $X(t)$er samfelldur ferill.
- Óvissan/breytileikinn liggur í B hlutanum.

$$V(\int^t \sigma(X(s), s)dW(s)) = \int^t \sigma^2(s)ds.$$

  Því $E(W(t)) = 0$ og $V(dW(t)) = dt$.
- Í nútíma fjármálastærðfræði er þetta notað til að gefa einfaldar verðlagningarformúlur (Black-Scholes).
- Við ákveðin markaðsskilyrði (fullkominn, arbitrage-free markaður, neikvæðar stöður leyfðar, o.s.frv.), $\mu = \mu X$, $\sigma = \sigma X$, áhættulausir vextir r, þá má leiða út að verðlagning er ekki fall af μ.

Regla Ito

- Ef hreyfimynstur $X(t)$ er þekkt er auðvelt að skrifa niður hreyfimynstur $Y(t) = g(X(t), t)$.

$$dY(t) = \frac{\delta g}{\delta t} dt + \frac{\delta g}{\delta x} dX + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 g}{\delta x^2} (dX)^2$$

- Athugið að $(dX)^2 = \sigma^2 dt$.
- Ef $dX = \mu dt + \sigma dW$, (random-walk með drift). Finnið dY ef $Y = exp(X)$.

$$\frac{\delta g}{\delta t} = 0, \quad \frac{\delta g}{\delta x} = exp(x), \quad \frac{\delta g^2}{\delta x^2} = exp(x) =$$

$$dY = exp(X)dX + \frac{1}{2} exp(X)(dX)^2 =$$

$$Y(\mu + \sigma dW) + \frac{1}{2} Y \sigma^2 dt = (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2) Y dt + \sigma Y dW.$$

Kallað geometric-Brownian-motion.

AR(1) í samfelldum tíma

- $dX = \alpha X dt + \sigma dW, \quad \alpha < 0, \quad \sigma > 0, \quad dW$ white-noise
- Kallað Ornstein-Uhlenbeck eða Vasicek(í fjármálum).
- Hvert er hreyfimynstur $Y = X^2$?
- $\frac{\delta g}{\delta x} = 2x, \quad \frac{\delta^2 g}{\delta x^2} = 2.$

$$dY = 2XdX + \frac{1}{2}2(dX)^2 = 2X(\alpha X dt + \sigma dW) + \sigma^2 dt = (2\alpha Y + \sigma^2)dt + 2\sigma\sqrt{Y}dW$$

- Kallað square-root process eða Cox-Ingersoll-Ross (í fjármálum).
- Hægt að setja aðra veldisvísa en $1/2$ á Y í diffusion-hlutann. T.d. CEV. Ferlið alltaf stærra en 0 ef veldisvísir er stærri en $1/2$.

Útvíkkanir

- Mjög margar verðlagninarformúlur til.
- Eru hopp leyfileg? Wiener-ferlið hoppar ekki. Ný liður því nauðsynlegur í diffurjöfnuna. T.d. má gera ráð fyrir einhvers konar Poisson hoppum. T.d. jafna 6.26 í bók.

$$\frac{dP}{P} = \mu dt + \sigma dW + d[\sum_{i=1}^{n_i}(J_i - 1)]$$

- Hér er $X = log(J)$ Laplace-dreift. Fjöldi hoppa á tímabilinu $(0, t)$ fylgja Poisson-dreifingu með meðaltal λt.