Dæmi úr large-sample teóríu

1. Gerum ráð fyrir að X fylgi dreifingu með þéttifall:

$$f(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad ,0 \leq x \leq 1, \quad 0 < \theta < \infty.$$

Óháðum mælingum er safnað með $X_1, \ldots, X_n$. Finnið ML-metil fyrir θ. Hvaða dreifingu stefnir $\hat{\theta}_{ML}$ á?

2. Gerum ráð fyrir að $X_1, \ldots, X_n$ séu iid úr dreifingu með líkindamassafall:

$$f(x) = P(X = x) = \exp(-\lambda)\lambda^x/x!, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

   (a) Leiðið út ML-metil fyrir λ.
   (b) Á hvaða dreifingu stefnir $\hat{\lambda}$?
   (c) Leiðið út LR próf fyrir kenninguna $H_0 : \lambda = \lambda_0$.
   (d) Leiðið út Wald próf fyrir kenninguna $H_0 : \lambda = \lambda_0$.
   (e) Leiðið út LM próf fyrir kenninguna $H_0 : \lambda = \lambda_0$.
   (f) Á hvaða dreifingu stefnir LR-prófstærðin ef H_0 er rétt?

3. Gerum ráð fyrir að $Y_t = \phi Y_{t-1} + \varepsilon_t$, þar sem ε_t er white-noise, $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ og $|\phi| < 1$. Meta á ϕ, gögnunum $(Y_1, \ldots, Y_T)$ er safnað og ákveðið að nota formúluna:

$$\hat{\phi} = \frac{\sum_{t=2}^T Y_t Y_{t-1}}{\sum_{t=2}^T Y_{t-1}^2}$$

   (a) Finnið $\text{plim}(\hat{\phi})$.
   (b) Finnið $\text{plim}(\hat{\phi}^2 - \phi^2)$.
   (c) Á hvaða dreifingu stefnir $\hat{\phi}$? Hver eru meðaltal og varíans í þeirri dreifingu?
   (d) Hvernig er þetta tilfelli frábrugðið tilfellinu $\phi = 1$? (Berið saman við kaflann um asymptotic distribution of Dickey-Fuller statistics í kafla 14, bls 616-619 í minni bók.).