Viðskipta- og Hagfræðideild
Háskóli Íslands

Tölfræði II, fyrirlestur 6
Helgi Tómasson

Líkindafræði kafli 2-9

- Berið saman við líkindafræðina í Newbold.
- Tilgangur líkindafræði í tölfræðinámsskeiði er að skapa umræðugrundvöll.
- Mælingarnar

  $x_1, \ldots, x_n$

  hafa orðið til sem gildi á hendingunum

  $X_1, \ldots, X_n$

- Þeir sem hafa lesið k. 2-9 hafa fengið tækifæri til að kveikja á ímyndunaraflinu. Þ.e. búið er að skilgreina ýmis konar hugtök sem gætu skipt máli varðandi þá krafta sem búa til mælingar. Er úrtak random? Er úrtak safn mælinga á stokastískum process? Hvaða líkindadreifingu gætu hendingarnar sem skapa mælingarnar fylgt?
- Reynið að svara spurningunum í lok hvers kafla.

Tölfræði(ályktunarfræði), k 11-15

- Kafli 10 (10.1-10.2) fjallar um brú frá líkindafræði yfir í hagnýt vísindi
- Hvað þýða líkur?
- Í fyrsta lagi er hugsanlegt að skilgreina líkur sem mælikvarða á tíðni. Sjá kafla 10.2.2. Berið einnig saman við Newbold.
- Í öðru lagi er hugsanlegt að skilgreina líkur sem mælikvarða á vissu. Sjá kafla 10.2.3.
- Hefðbundin tölfræði byggir á tíðnitúlkun. Bayesísk tölfræði byggir á vissutúlkuninni. Í kafla 10.2.4 sýnir Spanos að hann telur að báðar túlkanir eigi rétt á sér.
- Afgangur af kaflnum er mikið um heimsspeki.

Kafli 11, grunnur að ályktunarfræði.

- Hver er tilgangur gagnasöfnunar?
- Svar: Ályktun um óþekktan parameter í líkindadreifingu.
- Hvað er parameter? Svar:

  $\theta = (\mu, \sigma)$ í $N(\mu, \sigma^2)$,

  λ í Poisson eða exponential-dreifingu.

  p í Bernoulli/binomial.

  Ef parameter (stiki) er þekktur þá getur við reiknað líkur.

  Í praxís er stikinn aldrei þekktur. Stiki(parameter)=vektor af tölum sem skilgreinir líkindadreifingu.
- Við höfum gögn:

  $x_1, \ldots, x_n$

  gildi á $X_1, \ldots, X_n$

  vitum að þéttifall x_i er

  $f(x; \theta)$

  Spurningar: Hvernig er úrtakið? a) random b) mælingar á stochastic process c) annað? Hvað segja gildin $x_1, \ldots, x_n$ um θ?
- Skoðið mynd 11.1

Höfuðverkefni ályktunarfræði

- Mat(estimation) á θ og prófanir.
- Mat er annað hvort punktmat (point estimation) eða bilmat (interval estimation). Bilmat felur í sér ályktun um nákvæmni punktmats.
- Prófanir eru prófanir á kenningum (hypothesis). Kenningaprófanir eru í eðli sínu einnig ályktanir um nákvæmni.
- Líkindafræðilegur grundvöllur er að gengið er út frá úrtaksdreifingu, þ.e.

  $$f(X_1, \ldots, X_n; \theta) \quad \text{í bók táknað}$$
  $$D(X_1, \ldots, X_n, \theta)$$

- Grundvallarhugt í ályktunarfræði er „*likelihood-function*"=sennileikafall.

  $$L(\theta|x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n; \theta)$$

- Likelihood-fallið úthlutar tilteknu gildi á óþekkta parameternum gildi. Þéttifallið úthlutar leyfilegu gildi á hendingu gildi.
- Við höfum úrtaksrúm (sample-space)=mengi af punktum sem eru mögulegar útkomur úr úrtaki og parameterrúm, $\mathbf{\Theta}$= mengi af punktum sem eru leyfileg gildi á parameternum.

Estimator=metill

- Metill(estimator) er fall h sem úthlutar gildi í úrtaksrúmi gildi í parameterrúmi.

  $$\hat{\theta} = h(X_1, \ldots, X_n)$$

  Útkoman er kölluð mat(estimate):

  $$\hat{\theta} = h(x_1, \ldots, x_n)$$

- Við köllum $\hat{\theta} = h(x_1, \ldots, x_n)$ punktmat á θ.

- Við þekkjum einnig öryggismörk (sbr. Newbold), þ.e. útkomu úr random bili. Athugið að leyfilegt er að segja:

  $$P(\bar{X} - 1.96\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.96\frac{S}{\sqrt{n}}) = 0.95$$

  en bannað er að segja

  $$P(\bar{x} - 1.96\frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + 1.96\frac{s}{\sqrt{n}}) = 0.95$$

  fólk fellur á prófi ef það segir þetta

Kenningaprófanir

- Nokkur hugtök að rifja upp úr kafla 9. í Newbold: Núllkenning, valkenning, villa I, villa II, marktæknistig (significance level), p-gildi, power, prófstærð (test-statistic), krítískt gildi (critical value).
- Hefðbundin aðferðafræði við kenningaprófanir er að sett er upp viðmið H_0 sem hlutmengi í stærri valkosti H_1. Síðan eru reiknaðar likur á fenginni útkomu eða ótrúlegri og H_0 hafnað ef fengin útkoma virðist ótrúleg gefið H_0 rétt. (Ef H_0 er ekki hlutmengi í H_1 er sagt að kenningarnar séu non-nested).

Spár

- Spá er ályktun um gildi hendingar utan úrtaks.

  $$\hat{X}_{n+1} = q(X_1, \ldots, X_n)$$

  Væntanlegt gildi lágmarkar væntanlega spáskekkju í öðru veldi. Þ.e.

  $q(\mathbf{X}) = E(X_{n+1}|X_1, \ldots, X_n)$
  lágmarkar
  $E(X_{n+1} - q(\mathbf{X}))^2$

Bayesísk ályktunarfræði

- Í hefðbundinni tölfræði er gengið út frá því að θ sé óþekkt föst tala. Líkur eru mælikvarði á tíðni svo það er merkingarlaust að tala um að það séu einhverjar líkur á að þessi óþekkta tala sé á einhverju tilteknu bili.

- Í bayesískri tölfræði þá er gengið út frá því að líkur séu mælikvarði á vissu og óvissu um θ er því eðlilegt að lýsa með líkindadreifingu.

- Gangur mála er nokkur veginn:

  $\theta \sim \pi(\theta)$ a priori vissa um θ

  gengið er út frá líkaninu

  $\mathbf{X}|\theta \sim \pi(\mathbf{X}|\theta)$

  gögn og apriori vissa eru síðan vegin saman með reglu Bayes

  $$\pi(\theta|\mathbf{X}) = \frac{\pi(\theta)\pi(\mathbf{X}|\theta)}{\int \pi(\mathbf{X}|\theta)\pi(\theta)d\theta} \text{ a posteriori dreifing } \theta$$

  Allar ályktanir um θ er síðan dregnar út frá eiginleikum a posteriori dreifingarinnar. T.d. reiknað meðaltal, median, mode, fjórðungamörk o.s.frv.

- Lesa lauslega kafla 11.4-11.5.

Úrtaksdreifingar

- Markmiðið er að hanna fall h þannig að hægt sé að nota $h(x_1, \ldots, x_n)$ sem mat á θ.
- Til að slíkt sé hægt þarf að hafa aðferð til að finna dreifingu $(X_1, \ldots, X_n)$.
- Tiltölulega auðveld fyrir iid-úrtak.
- Dæmi: iid-úrtak úr Bernoulli eða iid-úrtak úr $N(\mu, \sigma^2)$.
- Höfum þegar tekið kjarnann úr 11.7. Um hver er dreifing $h(X)$ og notum CLT til að nálga dreifingu úrtaksmeðalstals.
- Lesið lauslega kafla 11.8.