Viðskipta- og Hagfræðideild **Háskóli Íslands**

Tölfræði II, fyrirlestur 2

Helgi Tómasson

Um dreifingar

- Hvers vegna hafa dreifingar nafn?
- Ýmsir eiginleikar vel þekktra dreifinga, sjá bls 136-145.
- Flokkunarkerfi fyrir dreifingar, samfelldar/strjálar(discrete), parametrískar dreifingar (hvað er parameter?), Pearson-dreifingar (bls. 37), exponential-family dreifingar (bls. 634), Johnson-fjölskylda (bls. 180).

Tvívíðar dreifingar

- Tvívítt dreififall er skilgrein:

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

og tilsvarandi tvívítt þéttifall

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

- Fyrir sundurslitnar hendingar gildir:

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

- Við köllum $COV(X,Y)$ kóvaríans X og Y.

$$COV(X,Y) = E(X-\mu_X)(Y-\mu_Y) =$$

$$\int\int (x-\mu_X)(y-\mu_Y)f(x,y)dxdy$$

- Við köllum $CORR(X,Y)$ fylgni X og Y

$$CORR(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

Óháðar hendingar

- Hendingar X og Y eru óháðar ef:

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

þ.e.

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

- Athugið að ef X og Y eru óháðar þá er $COV(X,Y) = 0$
- $f_X(x)$ og $f_Y(y)$

Skilyrtar dreifingar

- Dreifing hendingarinnar $X|Y$, X gefið Y er skilgreind:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

Reiknireglur fyrir væntanlegt gildi og varíans

- Ef X og Y eru hendingar og a er rauntala þá gildir:

$$E(aX+Y) = aE(X) + E(Y)$$
$$V(aX) = a^2\,V(X)$$
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,COV(X,Y)$$

Moment-generating function, mgf og characteristic function NÝTT!!

- Moment-generating function, mgf, er skilgreind:

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \int e^{tx} f(x)dx$$

- Characteristic function er skilgreind:

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int e^{itx} f(x)dx \quad i = \sqrt{-1}$$

- Gagnsemi þessara falla má sjá með því að diffar $m_X(t)$ í 0:

$$m'_X(t) = E(Xe^{tX}) = \int xe^{tx} f(x)dx \quad \text{set 0 inn}$$
$$m'_X(0) = E(X) \quad \text{á sama hátt fæst}$$
$$m''_X(0) = E(X^2) \quad \text{þ.e.}$$
$$V(X) = m''_X(0) - [m'_X(0)]^2$$

- Það er erfiðara að skilja characterisitic function því að það er complex stærð. Hins vegar er hún alltaf til og ákvarðar dreifinguna (F_X) í þeim punktum sem F_X er samfelld.

Nokkur atriði um margvíðar hendingar

- Fylkja-framsetning mjög þægileg.

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$$
$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

- Reiknireglur fyrir væntanlegt gildi og varíans: Ef A er fylki.

$$E(A\mathbf{X}) = AE(\mathbf{X})$$
$$V(A\mathbf{X}) = AV(\mathbf{X})A'$$

og mgf og cf

$$m_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E(e^{\mathbf{t}'\mathbf{X}}) \quad \text{og}$$
$$\phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = E(e^{i\mathbf{t}'\mathbf{X}}) \quad i = \sqrt{-1}$$

- Athugið að ef X_1 og X_2 eru óháðar þá er

$$\phi_{X_1+X_2}(t) = \phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t)$$

Ef dreifing X er þekkt, hver er þá dreifing $h(X)$?

- Aðalaðferðin fyrir samfelldar hendingar og 1-1 fall h, byggir á eftirfarandi:

$$Y = h(X) \Leftrightarrow X = h^{-1}(X) \quad h^{-1} \text{ er andhverfa } h$$
$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq h^{-1}(y)) = F_X(h^{-1}(y))$$
$$\text{ með diffrun fæst}$$
$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))|\frac{d}{dy}h^{-1}(y)|$$

- Margvíð útgáfa fyrir $\mathbf{Y} = \mathbf{h}(\mathbf{X})$ er:

$$Y_1 = h_1(X_1, \ldots, X_n) \quad X_1 = \underbrace{h_1^{-1}(Y_1, \ldots, Y_n)}_{\text{fyrsta hnit í andhverfu } \mathbf{h}}$$
$$Y_2 = h_2(X_1, \ldots, X_n)$$
$$\vdots$$
$$Y_n = h_n(X_1, \ldots, X_n)$$
$$\text{ þá fæst á sama hátt}$$
$$f_{\mathbf{Y}}(y_1, \ldots, y_n) = f_{\mathbf{X}}(h_1^{-1}(y_1, \ldots, y_n), \ldots, h_n^{-1}(y_1, \ldots, y_n))\boldsymbol{J}$$
$$\boldsymbol{J} = \text{ ákveða Jacobi-fylkis } \mathbf{h}^{-1}$$

Sjá nánar á bls. 585-594. Berið saman við dæmi á bls 127-128.

- Stundum verður að fara aðrar leiðir.

Ýmsar dreifingar

- Við flokkum hendingar í sundurslitnar og samfelldar.
- Sundurslitnar hendingar geta tekið teljanlega mörg gildi (hægt að að númera möguleg gildi)
- Samfelldar hendingar geta tekið öll gildi á tilteknu(m) talnabili(um).

Nokkrar sundurslitnar dreifingar

- Bernoulli,

$$P(X=1)=p \quad P(X=0)=1-p$$

- Binomial, summa n óháðra Bernoulli,

$$f(k)=P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,2,\ldots,n$$

- Uniform,

$$f(k)=P(X=k)=\frac{1}{\theta+1}, \quad k=0,1,2,\ldots,\theta$$

- Geometric (rússnesk rúlletta),

$$f(k)=P(X=k)=p(1-p)^{k-1} \quad k=0,1,2,\ldots$$

- Poisson

$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

- Negatív binomial, t.d. summa óháðra geometric.
- Hypergeometric (lottó-dreifing).

Nokkrar samfelldar dreifingar

- Uniform, $U(a,b)$

$$f(x)=\frac{1}{b-a}$$

- Exponential,

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$$

- Normal, $N(\mu,\sigma^2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu=0$ og $\sigma=1$ er kölluð stöðluð normal

- $\chi^2(k)$ er summa k óháðra $N(0,1)$ í öðru veldi
- Ef U er $\chi^2(m)$ og V er $\chi^2(n)$ og U og V óháðar, þá er

  $$\frac{U/m}{V/n} \quad F_{m,n} \text{ F-dreifing}$$

- Hending t-dreifð, $t(n)$ ef $t(n)^2$ er $F_{1,n}$.
- Cauchy má t.d. skilja sem $t(1)$ eða hlutfall tveggja óháðra $N(0,1)$.
- Gamma dreifingu má t.d. fá sem summu að óháðum einsdreifðum exponential.
- Ef X er normal þá er e^X log-normal.

Margvíð normaldreifing

Skilgreining: Hending $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ er sögð n-víð normal, táknað $N(\mu, \Sigma)$ ef:

$$f(\mathbf{x}) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n |\Sigma|^{-1/2} e^{-(\mathbf{x}-\mu)'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)/2}$$
$$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)'$$
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \sigma_{1n} & & & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$
$$E(\mathbf{X}) = \mu$$
$$V(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)' = \Sigma$$

- Öll hnit eru normal
- Allar línulegar samsetningar $A\mathbf{X}$ eru líka normal
- Ef $\mathbf{X}$ er skipt i $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)'$ þá:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}' & \Sigma_{22} \end{bmatrix}) \tag{1}$$

þá er:

$$E(\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2 = x_2) = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2) \tag{2}$$

og

$$V(\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2 = x_2) = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}'$$