Viðskipta- og Hagfræðideild | **Tölfræði II, 04.51.09-960**
Háskóli Ísland | **6. desember 2004**

Hugmynd að lausn við prófi

1. Notið vægisframleiðandann (moment generating function) til að sýna fram á að ef X er gamma dreift þá er $E(X) = \alpha\beta$ og $Var(X) = \alpha\beta^2$.
   Moment generating function fyrir gamma dreifingu er: $m(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$, fyrir $t < \frac{1}{\beta}$. Byrjum á því að diffra m.g.f:

$$\begin{aligned} M'(t) &= \frac{\alpha\beta}{(1-t\beta)^{\alpha+1}} \\ M''(t) &= \frac{\alpha(\alpha+1)\beta^2}{(1-t\beta)^{\alpha+2}} \end{aligned}$$

   Nú verða hráu mómentin:

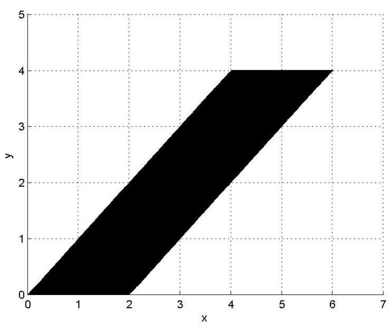
$$\begin{aligned} M'(0) &= \alpha\beta \\ M''(0) &= \alpha(\alpha+1)\beta^2 \end{aligned}$$

   Og þá verða central mómentin:

$$\begin{aligned} E(X) &= M'(0) = \alpha\beta \\ Var(X) &= M''(0) - [M'(0)]^2 = \alpha(\alpha+1)\beta^2 - [\alpha\beta]^2 = \alpha\beta^2 \end{aligned}$$

2. Gefið er tvívíða þéttifallið $f(x,y) = \frac{1}{8}$, $0 \le y \le 4$, $y \le x \le y+2$.

   (a) Teiknið $f(x,y)$ í tvívídd með y á y-ásnum og x á x-ásnum. Ef



   $f(x,y) = 1/8$ þá hlýtur flatarmál myndarinnar að vera 8.

   (b) Finnið $f(x)$.
   Nú gildir um jaðardreifingar $f(x) = \int_y f(x,y)dy$. Í þessu tilfelli er hins vegar erfiðast að finna mörkin á x og y. Skipta þarf y í þrjá hluta, en x hefur alltaf sömu mörkin:

$$\begin{aligned} &y_1 \in [0,x] \qquad x \in [y, y+2] \\ &y_2 \in [x-2, x] \\ &y_3 \in [x-2, 4] \end{aligned}$$

Nú verður jaðarfallið fyrir x:

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{8}dy = [\frac{1}{8}y]_0^x = \frac{x}{8} & 0 \le x \le 2 \\ \int_{x-2}^x \frac{1}{8}dy = [\frac{1}{8}y]_{x-2}^x = \frac{x}{8} - \frac{1}{8}(x-2) = \frac{1}{4} & 2 < x \le 4 \\ \int_{x-2}^4 \frac{1}{8}dy = [\frac{1}{8}y]_{x-2}^4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8}(x-2) = \frac{6-x}{8} & 4 < x \le 6 \end{cases}$$

(c) Finnið $f(x|y)$.
Um skilyrtar dreifingar gildir að: $f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$. Nú verður:

$$f(y) = \int_y f(x,y)dy = \int_y^{y+2} \frac{1}{8}dx = \Big[\frac{1}{8}x\Big]_y^{y+2} = \frac{y+2}{8} - \frac{y}{8} = \frac{1}{4}$$

Nú verður:

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)} = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$$

(d) Finnið $E(X|Y=y)$.

$$E(X|Y=y) = \int_x x \cdot f(x|y)dx = \int_y^{y+2} \frac{1}{2}xdx = \Big[\frac{1}{4}x^2\Big]_y^{y+2} = \frac{1}{4}(y+2)^2 - \frac{1}{4}y^2 = y+1$$

3. Sameiginlegt þéttifall fyrir X og Y er gefið sem:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4e^{-2(x+y)} & \text{ef } x, y > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

(a) Finnið $P(W > 2)$ þar sem $W = X + Y$.
Vitum að $P(W > 5) = 1 - F(5)$. Notum nú cdf aðferðina (Poirier kafli 4.2) til að finna $F(W)$. Einnig má nota aðrar aðferðir.

$$\begin{aligned} F(W) &= P(W \le w) = P(X+Y \le w) = P(X \le w - Y) \\ &= \int_0^w \int_0^{w-y} 4e^{-2(x+y)}dxdy \\ &= \int_0^w \Big[-\frac{4}{2}e^{-2(x+y)} \Big]_0^{w-y} dy \\ &= \int_0^w 2(e^{-2y} - e^{-2w})dy \\ &= \Big[-\frac{2}{2}e^{-2y} - 2ye^{-2w} \Big) \Big]_0^w \\ &= 1 - e^{-2w} - 2we^{-2w} = 1 - e^{-2w}(1+2w), w > 0 \end{aligned}$$

$$P(W > 2) = 1 - P(\le 2) = 1 - F(2) = 1 - 1 + 5e^{-4} = 9,16\%$$

Hér er hefur verið notast við svokallaða cdf lausn (Poirier kafli 4.2). Hins vegar er hægt að nota fleiri lausnir við að leysa þetta t.d. convolution theorem.

(b) Finnið sameiginlega þéttifallið fyrir $U = X/Y$ og $V = X$.
Notum "change-of-variable"aðferðina (Poirier kafli 4.4):

$$\begin{array}{ll} X = V & Y = X/U \\ X = V & Y = V/U \\ x = v & y = v/u \end{array}$$

Nú verður ákveðan af Jacobian fylkinu:

$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = \frac{v}{u^2}$$

Nú verður sameiginlega þéttifallið:

$$h(u,v) = |\mathbf{J}| \cdot f(\psi(u,v)) = \frac{v}{u^2} \cdot 4e^{-2(v+v/u)} = 4\frac{v}{u^2}e^{-2v(1+1/u)} \qquad u, v > 0$$

(c) Finnið jaðarþéttifallið fyrir U.

$$\begin{aligned} f(u) &= \int_0^\infty 4\frac{v}{u^2}e^{-2v(1+1/u)}dv \\ &= \int_0^\infty 4\frac{v}{u^2}e^{-2v(1+1/u)}dv \end{aligned}$$

Notum nú $\int vdu = uv - \int udv$ þar sem:

$$\begin{array}{ll} v = v & u = \frac{1}{-2(1+1/u)}e^{-2v(1+1/u)} \\ \frac{dv}{dv} = 1 & \frac{du}{dv} = e^{-2v(1+1/u)} \\ dv = dv & du = e^{-2v(1+1/u)}dv \end{array}$$

Nú fæst:

$$\begin{aligned} f(u) &= \int_0^\infty 4\frac{v}{u^2}e^{-2v(1+1/u)}dv \\ &= \frac{4}{u^2}\left(v \cdot \frac{1}{-2(1+1/u)}e^{-2v(1+1/u}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -2(1+1/u)e^{-2v(1+1/u)}dv \right) \\ &= \frac{4}{u^2}\left(0 - \left[-\left(\frac{1}{2(1+1/u)}\right)^2 \cdot e^{-2v(1+1/u)} \right]_0^\infty \right) \\ &= \frac{4}{u^2} \cdot \frac{1}{4(1+1/u)^2} = \frac{1}{(1+u)^2} \qquad u > 0 \end{aligned}$$

4. Hendingarnar $X_1 \ldots X_n$ hafa dreifinguna $\Gamma(2,\theta)$, þannig að þéttifallið er:

$$f(x) = \frac{x}{\theta^2}e^{-x/\theta} \qquad x \in \mathbb{R}_+$$

(a) Leiðið út metill hámarkslíkinda (maximum likelihood) fyrir θ.

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta^2}e^{-x_i/\theta} = \left(\frac{x_i}{\theta^2}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i}$$

Nú verður log-liklihood fallið:

$$lnL(\theta) = \ell(\theta) = nln(x_i) - 2n \cdot ln(\theta) - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Þar sem við erum bara með einn stika þá verða score-fallið:

$$s_c(\theta) = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{2n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

ML metillinn fæst nú með því að setja $s_c(\theta) = 0$ og leysa fyrir θ:

$$\begin{aligned}
-\frac{2n}{\widehat{\theta}} + \frac{1}{\widehat{\theta}^2}\sum_{i=1}^{n} x_i &= 0 \\
-\frac{2n}{\widehat{\theta}} + \frac{n\overline{x}}{\widehat{\theta}^2} &= 0 \\
-2n\widehat{\theta} + n\overline{x} &= 0 \\
\widehat{\theta} &= \frac{\overline{x}}{2}
\end{aligned}$$

Til að kanna hvort þetta sé hámark þá könnum við hvort 1×1 Hessian-fylkið sé neikvætt:

$$\begin{aligned}
H(\theta) &= \frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta^2} \\
&= \frac{2n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i < 0
\end{aligned}$$

(b) Er $\widehat{\theta}_{ML}$ óbjagaður (unbiased) metill?

$$\begin{aligned}
E(\widehat{\theta}) &= \frac{1}{2}E(\overline{x}) \\
&= \frac{1}{2}2\theta \\
&= \theta
\end{aligned}$$

Og því er $\widehat{\theta}_{ML}$ óbjagaður metill fyrir θ.

(c) Er $\widehat{\theta}_{ML}$ nýtinn (efficient) metill? Fyrst $\widehat{\theta}_{ML}$ er óbjagaður metill þá getum við kannað hvort hann er full skilvirkur (full efficient) með því að kanna hvort $Var(\widehat{\theta}_{ML})$ nái Cramer-Rao neðri mörkum. Nú verður Fischer upplýsingafylkið:

$$\begin{aligned}
I(\theta) &= E\left(-\frac{\partial^2 \ell(\theta)}{\partial \theta^2}\right) = E\left(-\frac{2n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \\
&= -\frac{2n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} \cdot 2n\theta = -\frac{2n}{\theta^2} + \frac{4n}{\theta^2} = \frac{2n}{\theta^2}
\end{aligned}$$

Og þá er auðvelt að finna Cramer-Rao neðri mörkin:

$$CR(\theta) = [I(\theta)]^{-1} = \frac{\theta^2}{2n}$$

Ef metillinn á að vera full skilvirkur þá þarf $Var(\widehat{\theta}) = CR(\theta)$.

$$\begin{aligned}
Var(\widehat{\theta}) &= E(\widehat{\theta}^2) - [E(\widehat{\theta})]^2 \\
&= E\left(\left(\frac{\overline{x}}{2}\right)^2\right) - \left(E\left(\frac{\overline{x}}{2}\right)\right)^2 \\
&= \frac{E(\overline{x})^2 - (E(\overline{x}))^2}{4} \\
&= \frac{Var(\overline{x})}{4} = \frac{Var(x)}{4n} \\
&= \frac{2\theta^2}{4n} = \frac{\theta^2}{2n}
\end{aligned}$$

Þar sem variance metilsins nær CR neðri mörkum telst hann fullskilvirkur.

5. Ef við höfum T athuganir sem eru Bernoulli dreifðar með massafallið (pmf):

$$f(y) = \begin{cases} \theta^y(1-\theta)^{1-y} & \text{ef } y = 0,1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Við viljum prófa núlltilgátuna $H_0 : \theta = \theta_*$ gegn valtilgátunni $H_1 : \theta \neq \theta_*$. Sýnið fram á að í þessu tilfelli er Wald prófstærðin:

$$W = \frac{T(\theta_* - \overline{Y})^2}{\overline{Y}(1-\overline{Y})}$$

þar sem $\overline{Y} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} y_i$

Waldprófstærðin er $W = T(\theta_* - \widehat{\theta}_T)^2 \cdot \mathrm{I}_\infty(\widehat{\theta}_T)$. Byrjum á því að finna likelihood fallið og log-likelihood fallið:

$$\begin{aligned}
L(\theta; y) &= \prod_{i=1}^{T} \theta^{y_i}(1-\theta)^{(1-y_i)} = \theta^{\sum_{i=1}^{T} y_i}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{T}(1-y_i)} \\
\ell(\theta; y) &= \sum_{i=1}^{T} y_i \cdot ln(\theta) + \sum_{i=1}^{T}(1-y_i) \cdot ln(1-\theta)
\end{aligned}$$

Nú má finna ML metil fyrir θ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(\theta; y)}{\partial \theta} = \frac{T\overline{Y}}{\widehat{\theta}} - \frac{(T - T\overline{Y})}{1-\widehat{\theta}} &= 0 \\
(1-\widehat{\theta})T\overline{Y} - \widehat{\theta}(T - T\overline{Y}) &= 0 \\
T\overline{Y} - \widehat{\theta}T &= 0 \\
\widehat{\theta} &= \overline{Y}
\end{aligned}$$

Nú finnum við 1×1 Hessian fylkið:

$$\frac{\partial^2 \ell(\theta; y)}{\partial \theta^2} = -\frac{T\overline{Y}}{\widehat{\theta}^2} - \frac{(T - T\overline{Y})}{(1-\widehat{\theta})^2} = 0$$

Og þá er auðvelt að finna Fischer upplýsingafylkið:

$$\begin{aligned}
-E\left[\frac{\partial^2 \ell(\theta;y)}{\partial\theta^2}\right] &= -E\left[-\frac{T\overline{Y}}{\widehat{\theta}^2} - \frac{(T-T\overline{Y})}{(1-\widehat{\theta})^2}\right] \\
&= E\left[\frac{T\overline{Y}}{\widehat{\theta}^2} + \frac{(T-T\overline{Y})}{(1-\widehat{\theta})^2}\right] \\
&= T\left(\frac{E[\overline{Y}]}{\widehat{\theta}^2} + \frac{(1-E[\overline{Y}])}{(1-\widehat{\theta})^2}\right) \\
&= T\left(\frac{\widehat{\theta}}{\widehat{\theta}^2} + \frac{(1-\widehat{\theta})}{(1-\widehat{\theta})^2}\right) \\
&= T\left(\frac{1}{\widehat{\theta}} + \frac{1}{(1-\widehat{\theta})}\right) \\
&= \frac{T}{\widehat{\theta}(1-\widehat{\theta})}
\end{aligned}$$

Nú verður asymptotíska upplýingafylkið (sjá Spanos bls. 717):

$$lim_{T\to\infty}\left(\frac{I_T(\theta)}{T}\right) = I_\infty(\theta)$$
$$\Rightarrow I_\infty(\theta) = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

Nú verður Wald prófstærðin:

$$\begin{aligned}
W &= T(\theta_* - \widehat{\theta}_T)^2 \cdot I_\infty(\widehat{\theta}_T) \\
&= \frac{T(\theta_* - \widehat{\theta}_T)^2}{\widehat{\theta}(1-\widehat{\theta})} \\
&= \frac{T(\theta_* - \overline{Y})^2}{\overline{Y}(1-\overline{Y})}
\end{aligned}$$

6. Hægt er að nota mýkt stuðlarit (smoothed histograms) til að bera myndrænt saman dreifingu raunverulegra gagna og þéttiföll mismunandi dreifinga. Útskýrið hvernig þetta er gert. Hvaða atriði skipta máli hér? Hvað er Kernel?

   Þegar við erum með gögn (sem eru homogen) í höndunum og viljum kanna hvaða dreifingu þau hafa getum við notað stuðlarit (histogram) og borið það saman við dreififöll mismunandi dreifinga. Með þessu móti freistar maður þess að geta fundið hvaða dreififall fellur best að stuðlaritinu. Vandamál stuðlarita er það hversu ónákvæm þau eru, þ.e. þau eru svolítið gróf og þess vegna getur verið erfitt að sjá hvaða dreifing fellur best að gögnunum hverju sinni, sérstaklega ef gagnasafnið er lítið.

   Mýkt stuðlarit brúar bilið á milli stuðlarita og dreififalla með því að gera nokkur gildi á x ás að miðju á bili með breiddina h. Fyrsta og einfaldasta útgáfan af mýktum stuðlaritum gerir ráð fyrir því að ef mæling er innan bilsins fær nú vigtina $1/nh$ en annars 0, þar sem n er fjöldi mælinga og h

er bandvídd. Þessu má lýsa með fallinu:

$$g_h(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}\Bigg(\left(x+\frac{h}{2}\right) \le x_i \le \left(x-\frac{h}{2}\right)\Bigg), \qquad x \in \mathbb{R}_{\mathbb{X}}$$

Þar sem $\mathbb{I}$ er indicator fall:

$$\mathbb{I}(x_i) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{ef } x_i \in [x \pm (h/2)] \\ 0 & \text{ef } x_i \notin [x \pm (h/2)] \end{array} \right.$$

Ímyndum okkur að við séum að skoða eitthvert stak á x ásnum x_i þá gildir fyrir sérhvert x_n að ef það er innan bils sem hefur breiddina h og miðju í x_i þá fær það stak vigtina $\frac{1}{nh}$ annars fær það vigtina 0. Síðan er summað upp fyrir hvert x_n og út kemur $g_h(x_i)$. Síðan beitum við samskonar aðferð á x_{i+1} o.s.frv. þannig að á endanum höfum við mýkt stuðlarit $g_h(x)$ sem hægt er að bera saman við fræðileg þéttiföll.

Það fall sem hér var notað var svokallað indicator fall þar sem mæling innan bilsins fær vigtina 1 en aðrar mælingar fá vigtina 0. Einnig er hægt að nota svokallað **Kernel**. Indicator fallið er uniform Kernel þar sem mælingar innan bilsins fá vigtina 1 en annars 0. Hægt er að nota annarskonar Kernel þar sem mælingar næst miðju bilsins fá mesta vigt og aðrar mælingar fær miðju bilsins fá minni vigt í hlutfalli við fjarlægð fá miðju bilsins. Í Spanos er gerð grein fyrir 4 mismunandi Kernel. Kernel þarf að uppfylla ákveðin skilyrði til að teljast vera Kernel, t.a.m. þarf $\mathbb{K}(z) \le 0$ og $\int \mathbb{K}(z)dz = 1$.

Að breyta um kernel getur haft áhrif á útlit mýkta stuðlaritsins. Það sem skiptir þó hins vegar yfirleitt meira máli er bandvíddin h. Með því að hafa stærra h verður mýkta stuðlaritið með mýkri útlínur. (ATH! Þessi setning er öfug í Spanos og röng þar. Ef h er valið of stórt þá getum við mýkt matið meira en æskilegt getur talist. Þess vegna er í einhverjum skilningi hægt að velja „besta" gildi fyrir h. Hins vegar mun stærra h alltaf auka mýktina í útlínum stuðlaritsins.)

7. Gerið grein fyrir hugtakinu delluaðhverf (spurious regression). Hvernig tengist þetta hugtak samþættingu (co-integration) og villuleiðréttingarlíkani (Error correction model).

   Delluaðhvarf er aðhvarfsgreining á tveimur óháðum og ósístæðum tímaröðum. Til þessa að klassísku forsendurnar um iid afgangsliði haldi þurfa tímaraðirnar að vera sístæðar. Lengi vel leysti fólk vandamál með ósístæðar tímaraðir með því að taka mismun (einn eða fleiri) af báðum tímaröðunum þar til þær teljast sístæðar og meta síðan aðhvarfsgreiningu milli sístæðu raðanna.

   Þegar tekinn er mismunur þá tapast allar upplýsingar um langtímasamband tímaraðanna. Þess vegna er ráðlagt að kanna hvort ósístæðar tímaraðir séu samþættar áður en mismunur er tekinn. Ef tímaraðirnar eru samþættar þá er til línulegt samband á milli tímaraðanna sem er sístætt. Ef svo er þá er betra að meta villuleiðréttingarlíkan (ECM) sem tekur tillit til þessa langtímasambands á milli tímaraðanna.

8. Á myndum 1,2 og 3 eru teiknaðar 3 tímaraðir ásamt sjálfylgnifalli (ACF) og hlutsjálffylgnifalli (PACF) fyrir hverja tímaröð. Gefið rökstudda ágisk-

un um hvers konar ferli hafi getað búið til hverja röð. Gæti í einhverju tilfelli verið ástæða til að nota Dickey-Fuller próf?

Hér er strax augljóst að líklega eru tímaraðir 1 og 2 sístæðar en tímaröð 3 ósístæð. Dickey-Fuller próf er notað til að prófa hvort einingarót sé til staðar. Ef svo er þá er tímaröðin ósístæð. Það getur verið gagnlegt að beita Dickey-Fuller prófi á allar tímaraðirnar til að ganga úr skugga um hvort 1 og 2 séu ekki sístæðar, en röð 3 ósístæð. Sjáffylgnifallið og hlutfjálffylgnifallið gerir meira en að gefa okkur hugmyndir um hvort tímaröð teljist sístæð. Hægt er að nota töflu sem teiknuð var í tíma til þess að geta sér til um hverskonar ferli bjó til hverja tímaröð. Tímaröð 1 er líklega AR(1)-AR(3), þar sem PACF gefur til kynna að um 1 eða 3 tafir séu í ferlinu. Raunverulega er þetta AR(3). Síðan er líklega MA(1) ferli, þar sem PACF er smá saman lækkandi (reyndar með mismunandi formerkjum) en ACF gefur til kynna að hér sé einungis eitt tafið gildi. Raunverulega er þetta MA(1). Að lokum gæti maður haldið að hér væri á ferðinni ósístætt AR(1) ferli sem er raunin.