

6. desember 2004, 13:30-16:30      Leyfileg hjálpargögn: Allir dauðir hlutir  
Kennari: Magnús Fjalar Guðmundsson

Rökstyðjið öll svör og gerið grein fyrir forsendum. Þar sem þið teljið að vanta forsendur gefið ykkur það sem þið teljið nauðsynlegt.

1. Notið vægisframleiðarann (moment generating function) til að sýna fram á að ef  $X$  er gamma dreift þá er  $E(X) = \alpha\beta$  og  $Var(X) = \alpha\beta^2$ .
2. Gefið er tvívíða þéttifallið  $f(x, y) = \frac{1}{8}$ ,  $0 \leq y \leq 4$ ,  $y \leq x \leq y + 2$ .
  - (a) Teiknið  $f(x, y)$  í tvívídd með  $y$  á  $y$ -ásnum og  $x$  á  $x$ -ásnum.
  - (b) Finnið  $f(x)$ .
  - (c) Finnið  $f(x|y)$ .
  - (d) Finnið  $E(X|Y = y)$ .

3. Sameiginlegt þéttifall fyrir  $X$  og  $Y$  er gefið sem:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4e^{-2(x+y)} & \text{ef } x, y > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

- (a) Finnið  $P(W > 2)$  þar sem  $W = X + Y$ .
  - (b) Finnið sameiginlega þéttifallið  $f(u, v)$  ef  $U = X/Y$  og  $V = X$ .
  - (c) Finnið jaðarþéttifallið fyrir  $U$ .
4. Hendingarnar  $X_1 \dots X_n$  eru óháðar og einsdreifðar með dreifinguna  $\Gamma(2, \theta)$ , þannig að þéttifallið er:

$$f(x) = \frac{x}{\theta^2} e^{-x/\theta} \quad x \in \mathbb{R}_+$$

- (a) Leiðið út sennileikametil (maximum likelihood) fyrir  $\theta$ .
  - (b) Er  $\hat{\theta}_{ML}$  óbjagaður (unbiased) metill?
  - (c) Er  $\hat{\theta}_{ML}$  nýttinn (efficient) metill?
5. Ef við höfum  $T$  óháðar athuganir sem eru Bernoulli dreifðar með massafallið (pmf):

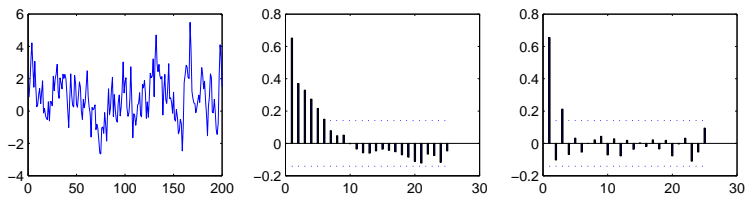
$$f(y) = \begin{cases} \theta^y (1 - \theta)^{1-y} & \text{ef } y = 0, 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Við viljum prófa núlltilgátuna  $H_0 : \theta = \theta_*$  gegn valtilgátunni  $H_1 : \theta \neq \theta_*$ . Sýnið fram á að í þessu tilfalli er Wald prófstærðin:

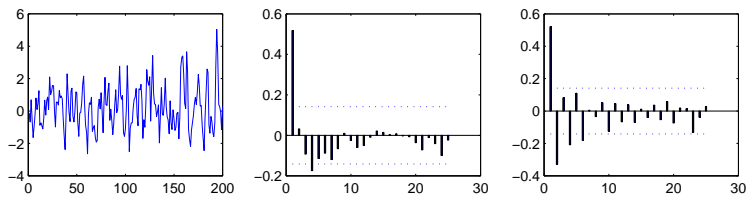
$$W = \frac{T(\theta_* - \bar{Y})^2}{\bar{Y}(1 - \bar{Y})}$$

þar sem  $\bar{Y} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T y_i$

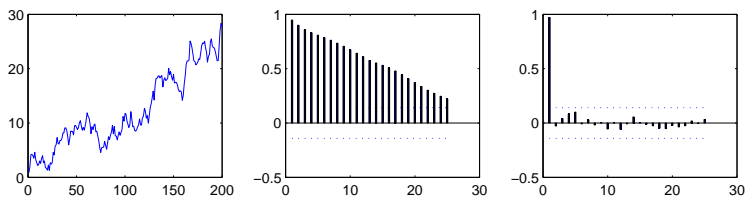
6. Hægt er að nota mýkt stuðlarit (smoothed histograms) til að bera myndrænt saman dreifingu raunverulegra gagna og þéttiföll mismunandi dreifinga. Útskýrið hvernig þetta er gert. Hvaða atriði skipta máli hér? Hvað er Kernel?
7. Gerið grein fyrir hugtakinu delluaðhverf (spurious regression). Hvernig tengist þetta hugtak samþættingu (co-integration) og villuleiðréttingarlíkani (Error correction model).
8. Á myndum 1,2 og 3 eru teiknaðar 3 tímaröðir ásamt sjálfylnifalli (ACF) og hlutsjálfylnifalli (PACF) fyrir hverja tímaröð. Gefið rökstudda ágiskun um hvers konar ferli hafi getað búið til hverja röð. Gæti í einhverju tilfelli verið ástæða til að nota Dickey-Fuller próf?



Mynd 1: Tímaröð 1 ásamt sjálfylnifalli og hlutsjálfylnifalli



Mynd 2: Tímaröð 2 ásamt sjálfylnifalli og hlutsjálfylnifalli



Mynd 3: Tímaröð 3 ásamt sjálfylnifalli og hlutsjálfylnifalli