



Einföld tölfræðilíkön fyrir þróun fasteignamarkaða

Helgi Tómasson

16. september 2016



Skipulag fyrirlestrar

- Hugtakið tímaröð reifað.
- Rifjað upp hvers vegna nauðsynlegt er að nota tímaraðalíkan.
- Nokkrum einföldum tímaraðalíkönunum lýst.
- Hugleiðing um tengsl fasteignaverðs og vaxta.
- Lauslegur samanburður á þróun fasteignaverðs í Kaupmannhöfn og Reykjavík.
- Lokaorð



Hvað er tímaröð?

- Tímaröð eru mælingar sem safnað er í tíma.
- Slík mælingasöfnun er frábrugðin slembiúrtaki (*random-sample*) að því leyti að breyturnar sem mynda mælingarnar geta verið háðar.
- Ályktunarreglur um slembiúrtök eiga því ekki við.
- Ganga verður út frá einhverju undirliggjandi hreyfimyndri (*dynamic system*).



- Í stærðfræði er hreyfimyngstri lýst með diffurjöfnum. Til dæmis er einfaldasta gerð:

$$x' = dx = \alpha x,$$

eða fasti sinnum frávik frá tilteknu gildi:

$$x' = dx = \alpha(x - \mu).$$

Talan α lýsir aðlögunarhraða lausnarferilsins að jafnvæginu μ . Kennslubækur í stærðfræðigreiningu, t.d. Kreyszig (1999), gefa forsendur um tilvist lausna, $x(t)$ fyrir vandamál af þessari gerð.



Til dæmis er einfaldasta jafna þar sem lausnarferillinn er sveiflukenndur á forminu:

$$x'' + \alpha x' + \beta x = 0.$$

Lausnarferillinn $x(t)$ inniheldur sveiflur er rætur margliðunnar $z^2 + \alpha z + \beta$ eru tvinntölur (enska: *complex numbers*). Þetta miðast við að tíminn sé samfelldur.



Í strjálum tíma eru til hliðstæður og rædd um mismunajöfnur (enska: *difference equation*) (Kelley & Peterson, 1991). Þá er hliðstæð framsetning:

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = \alpha x_{t-1}.$$

Hugmyndafræðin í strjálum og samfelldum tíma er svipuð, þ.e. breytingin er fall af eldri stöðu. Stærðfræðitæknin er ólík. Einfaldasta form af jöfnu af þessari gerð sem inniheldur sveiflur er á forminu:

$$\Delta^2 x_t + a\Delta x_t + bx_t = 0.$$

Á sama hátt og í tilviki samfellds tíma er lausnarferillinn, x_t , er sveiflukenndur ef rætur margliðunnar $z^2 + az + b$ eru tvinntölur.



Þegar unnið er með mælingar sem eru háðar í tíma er oft gengið út frá því að mæld verið einhvers konar mismunajafna að viðbættum einhvers konar slembilið (stochastic term). Tímaraðalíkön má því kalla slembnar mismunajöfnur. Einföldu grunnhreyfimyndi er lýst með $AR(1)$ ferli:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \text{ óháðar } N(0, \sigma^2), \text{ eða}$$

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Stöðugleikahugtak sem venjulega er notað er á íslensku kallað sístæðni (enska: stationarity). Í hagnýtri vinnu er notast við hugtakið veik stíðstæðni sem þýðir að væntanlegt gildi $E(y_t) = \mu$ og $E(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)$ eru ekki föll af tíma.



Líkan af þessari gerð hefur sveifluþátt ef rætur margliðunnar $1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2$ eru tvinntölur. Slembiliður, sem hefur eiginleika ε_t er kallaður hvítur hávaði (enska: white noise). Línulegu slembnu hreyfimyntri í strjálum tíma má lýsa með jöfnu þar sem gildi á tíma t er skýrt með línulegri samantekt af liðnum mælingum á y_r og liðnum gildum á ε .

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}. \quad (1)$$

Eðli hreyfimynturs y_t er stjórnað af $(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$ og kvörðunarstíkanum σ . Ferli að gerðinni sem lýst er í jöfnu (1) er nefnt ARMA(p,q).



Tímaferli er samsett úr langtímaþróun, sveiflum, árstíðum og óreglulegum hætti,

Röð = leitni + sveiflur + árstíð + óreglulegur liður.

Orðið leitni (enska: *trend*) er oft notað yfir langtímaþróun. Leitnin gæti verið einhvers konar fall af tíma. Hún gæti einnig verið einhvers konar uppsöfnuð (enska: *integrated*) saga, þ.e. að gildi númtímans er gildi nýliðinnar fortíðar að viðbættum einhverjum sveifluþáttum.



Til dæmis að:

$$u_t = y_t - y_{t-1} = \Delta y_t,$$

u_t er ARMA(p,q),

eða

$$u_t = \Delta^d y_t \text{ er ARMA}(p,q).$$

Í síðastnefnda tilfellinu er sagt að y_t sé
ARIMA(p,d,q) (enska: Auto-Regressive-Integrated-
Moving-Average).



Box & Jenkins (1976) tóku saman reglur um hvernig mætti vinna að ARIMA líkanagerð. Það má segja að kjarninn í nálgun Box & Jenkins (1976) hafi verið frávikagreining, þ.e. skoðun á metnum frávikum, $\hat{\varepsilon}_t$ ásamt nískureglunni (enska: *principle-of-parsimony*). Frávikagreiningin gengur út á að eiginleikar metinna frávika eiga að líkjast fræðilegum eiginleikum ε_t , þ.e. líkjast hvítum hávaða. Frávikin mega ekki vera spáanleg, því þá er líkanið ekki að fanga þá þætti ferlisins sem er spáanlegur. Nískureglan segir að líkanið eigi að vera einfalt, þ.e. $p + q$ er lág tala.



Nálgun Box & Jenkins (1976) þótti gefa gagnlegar útkomur við spár og var handhæg í notkun þegar nothæf tölvuforrit voru við hendina. Þeirra nálgun var í grundvallaratriðum einvíð, þ.e. unnið var með eina breytistærð í einu. Með uppfinningu á samþættingarhugtakinu (enska: *cointegration*) náðist almennari sátt um tímaraðanálганir í greiningu hagrænna tímaraða.



Grunnhugmyndin er að til sé eitthvert jafnvægi. Til dæmis er sagt að dæmi um jafnvægi milli stærðanna x og y sé þannig að sambandi þeirra sé lýst með

$$y + ax = 0.$$

Þ.e. að gefnu gildi á annari breytunni megji reikna hina út. Í praxís er aldrei mælt 0. Þannig að ef fyrir hendi eru mælingar á tíma t á breytunum x og y , x_t og y_t þá gildir að:

$$y_t + ax_t = z_t.$$



Hugmyndin er að ef jafnvægið hefur einhverja merkingu þá hljóti ferlið z_t að vera mun stöðugra en x_t og y_t . Jafnvægisgreining af þessari gerð er kölluð ECM (enska: *error-correction-modeling*). Hugmyndin er að hagrænir kraftar þvingi z_t í átt að 0. Frávik frá jafnvægi megi því nota við spár. Þessi nálgun sló í gegn með grein Granger & Engle (1987). Í nútíma kennslubókum í hagrannsóknum eru ítarlegar lýsingar á ýmis konar, prófunum og matsaðferðum sem lýsa því hvernig álykta megi um tilvist og eðli samþættingarsambanda. Í þessari grein er ekki farið út í tæknileg atriði heldur er byggt á innsæi.



Það að ε_t sé línulega óspáanlegt þýðir ekki endilega ekki sé hægt að segja neitt um framtíða ε_t .

Granger (1983) lýsti hvernig hugsanlegt væri að stærðargráða tölugildisins væri spáanleg þó röðin sjálf væri ekki spáanlegt. Þetta er svipað eins og það að breytur geta verið háðar þó að fylgni þeirra sé 0. Engle (1982) hagnýtti þessa hugmyndi í greiningu á breskri verðbólgu. Ein útfærsla á hugmyndinni var að gera ráð fyrir að:

$$y_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \text{ óháðar } N(0, 1),$$
$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2.$$

Þetta líkan skammstafað ARCH(1)
(enska: *auto-regressive-conditional-heteroskedacity*).



Hreyfimyngstrið byggði á skilyrtri misdreifni.
Hugmyndin er að spá megi framtíða stærð frávika
frá 0. Hliðstæðan við AR(1) líkanið blasir við og
því þróast útvíkkun á útfærslunni svipað og
ARMA hugmyndin:

$$y_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \text{ óháðar } N(0, 1),$$
$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q y_{t-q}^2$$
$$+ \beta_1 h_{t-1} + \cdots + \beta_p h_{t-p}.$$



Vinsældir ARMA og GARCH ráðast af því að ná má raunhæfari nálgun með einfaldara líkönum en hreinum AR og ARCH líkönum. Þ.e. $p+q$ er lág tala. Margar útfærslur og útvíkkarir eru til af þessum hugmyndum. Granger og Engle fengu Nóbelsverðlaun í hagfræði 2003. Granger var tilnefndur fyrir að hafa fundið upp samþættingarhugmyndina og Engle fyrir að hafa þátt sinn í þróun ARCH líkana. ARCH/GARCH líkön hafa þótt áhugaverð á fjármálamörkuðum þar sem taugatitringur og spákaupmennska kemur í gusum. Góð greining á tölfræðilíkönum sem þessum er í Tsay (2010).



Hugleiðingar um vexti og fasteignaverð

Flestir þurfa að taka lán til kaupa á fasteignum.
Ákvörðunin um fasteignakaup er því nátengd verði á lánsfé. Í kennslubókum er kennt að ef upphæð C er lögð á bankareikning með vöxtunum r að þá fáist $(1 + r)C$ greitt einu tímabili (ári) síðar. Á sama hátt er virði þess að fá C strax og annað C eftir eitt tímabil $C/(1 + r)$.



Virði fjárstreymis sem greiðir C á hverju tímabili er því:

$$V = C + C/(1 + r) + C/(1 + r)^2 + \dots .$$

Með reglum úr stærðfræðigreiningu má sjá að ef tímabilin eru mjög mörg þá verður

$$V = C/r.$$



Þegar (fasteigna)viðskipti eiga sér stað verður virði greiðsluflæðisins að vera jafnt virði eignarinnar í viðskiptunum. Það blasir því við að lækkun vaxta hefur í för með sér hækkun á virði eignar. Hér virðist því blasa við einhvers konar jafnvægi ætti að vera hægt að sannreyna.



Mælinga- og skilgreiningavandi blasir við. Vextirnir r eru ekki ein tala það er ferill í tveim tímavíddum. Annars vegar eru vextir á 1 árs láni ekki þeir sömu og á 30 ára láni. Oft er reiknað með því að vextir á löngu láni séu hærri en á stuttu, þ.e., vaxtarófið (enska: *yield curve*) er upphallandi. Vextir þróast í tíma eftir óvissum ferli og vextir fara eftir því hver skuldari er. Til dæmis eru vextir á ríkisskuldabréfum oft lægri en vextir annara skuldara. Verði V er einnig vandamál því eignir eru misleitir og vafasamt að slá þeim saman og mynda einhvers konar meðaleign.

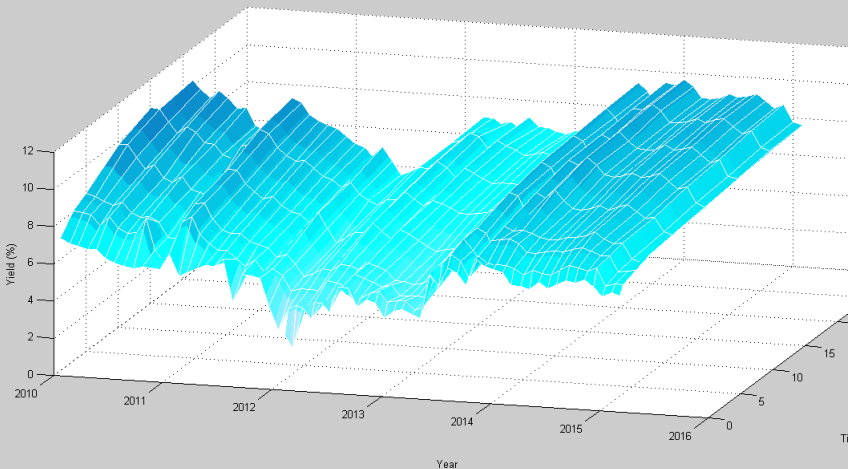


Gæðaeiginleikar eigna þróast með aldri og nýbygging á einum tíma hefur aðra eiginleika en nýbygging á öðrum tíma. Þróun gæða og annara eiginleika eru atriði þarf að hafa í huga við allar vísitölur.

Mælieiningin sem viðskiptin fara fram í er einnig atriði. Eru greiðslurnar á föstu verðlagi? Þ.e. er kaupsamningur verðtryggður? Eða eru verðbæturnar hluti af r ? Í langtímasamningum þarf að gera ráð fyrir því að verðgildi peninga er ekki fast. Í viðskiptum þarf alltaf að gera ráð fyrir að skellir geta komið á framboð og eftirspurn, auk þess sem tækniþróun hefur áhrif.

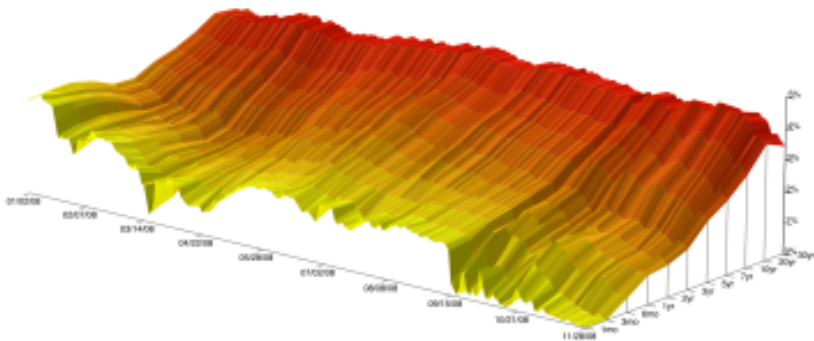


Hvað eru vextir?



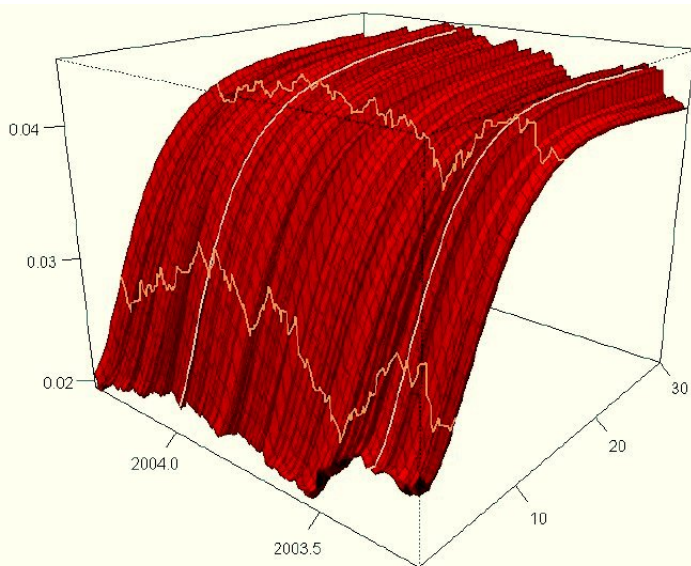


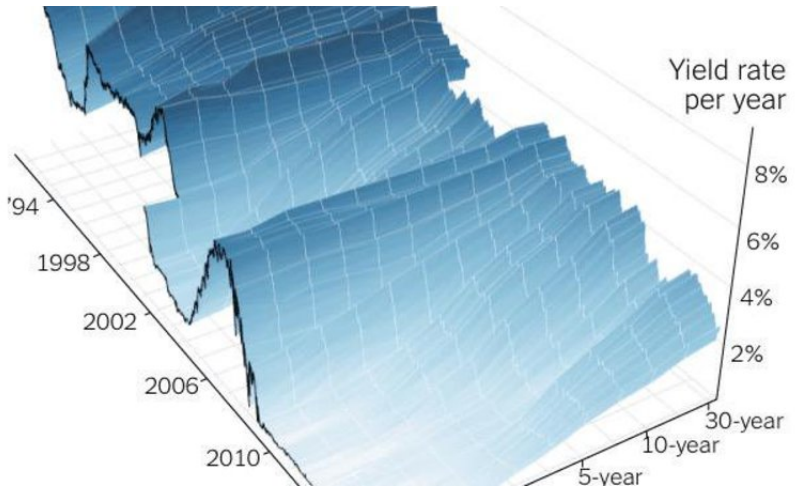
Yield Curve 2008 — Daily





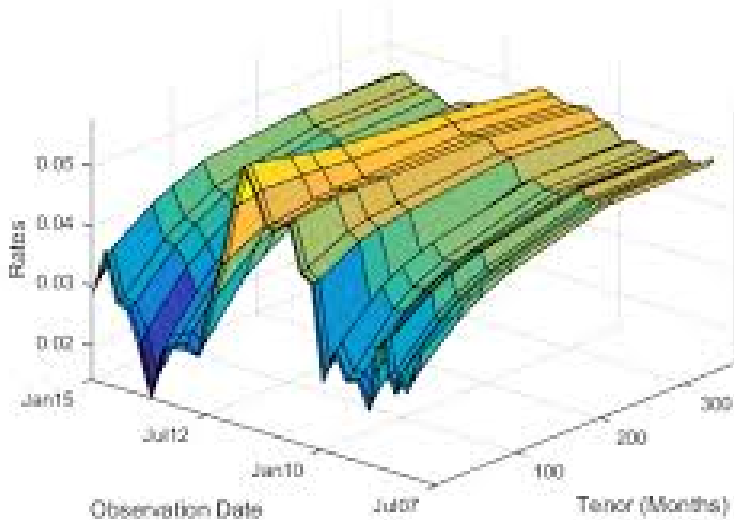
Libor







Scenario 20 Yield Curve Evolution





Það blasir við að vextir er eitthvað miklu flóknara en ein tala. Vextir eru einhvers konar ferli:

$$r(t, T), \quad t \text{ er almanakstími og} \\ T \quad \text{er skuldbindingartími.}$$

Síðan bætast flókin atriði við svo sem verðlagning uppgreiðsluréttar.



Einföld gagnagreining

Hér fer á einföld tímaraðagreining á þróun á fasteignamarkaði. Til viðmiðunar eru tekin gögn frá tveim svæðum, Reykjavík og Kaupmannahöfn. Samanburður milli landa er alltaf varasamur. Breyturnar í greiningunni eru verðlag, verð á íbúð í fjölbýli, stuttir vextir og langir vextir.

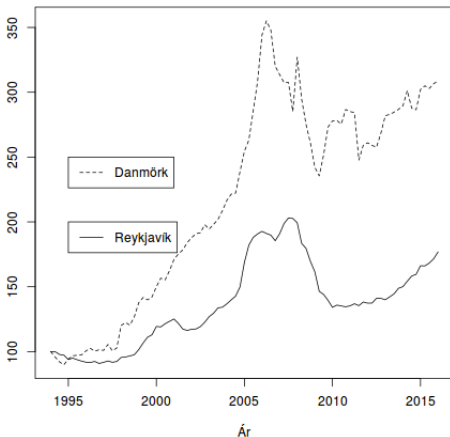


Breyta	Reykjavík	Kaupmannahöfn
verðlag	vísitala	vísitala
verð á íbúð	vísitala	vísitala
stuttir vextir	stýrivextir	stýrivextir
langir vextir	ávöxtunarkrafa	10 ára ríkisskuldabréf

Tafla: Breytur og eðli mælinga. Gögn voru fengin frá hagstofum og seðlabönkum.



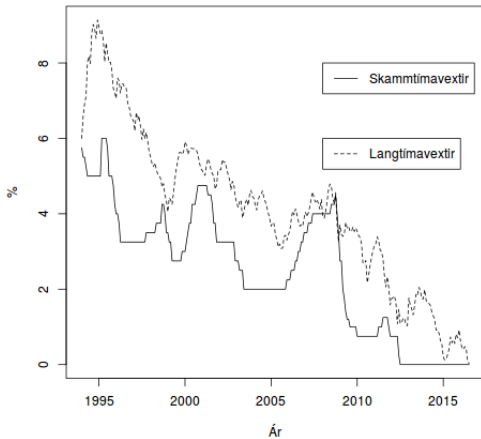
Þróun raunvirðis íbúðaverðs



Mynd: Íbúðarverð á föstu verðlagi í Kaupmannahöfn og Reykjavík.



Vaxtaþróun í Danmörku



Mynd: Þróun danskra vaxta



Alþekkt er að verðbólga hefur verið meiri á Íslandi en í flestum OECD löndum. Vextir og raunvextir lækkuðu eftir 1995. Þó fyrr og hraðar í Danmörku. Mynd 1 sýnir þróun íbúðaverðs á 20 ára tímabili. Bæði lönd sýna ákveðna bóluhegðun á árunum 2005-2008. Ljóst er að á föstu verðlagi er bólan miklu stærri í Danmörku. Ljóst er að fyrir bæði lönd er að mjög hæpið að tala um raunvirði íbúða sé fast. Ferlarnir eru miklu villtari en en sennilegt sé að tæknibreytingar skýri þróunina. Til að skýra svona mikinn óstöðugleika þarf að bæta við breytu sem einnig er óstöðug. Í íslensku bólunni tvöfaldaðist raunverð. Danska bólan virðist mun stærri.

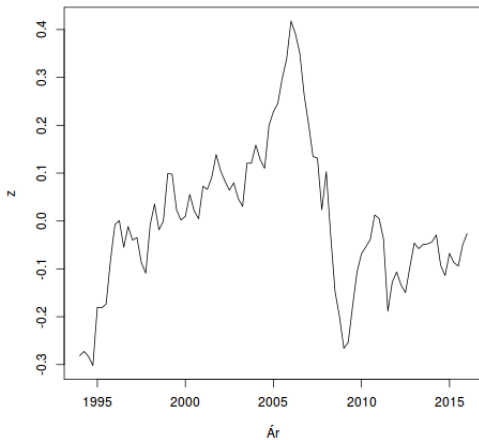


Það er áhugavert að reyna að meta einhvers konar samþættingarjöfnu íbúðaverðs, almenns verðlags, skammtímaaxta og langtímaaxta. Stöðugleiki fráviks frá slíkri jöfnu gætu gefið vísbendingar um eðli hreyfimynturs þessara stærða. Metin jafna er:

$$\log(\text{íbúðarverð}) = \log(\text{verðlag}) + \text{langtímaaxtir} + \text{skammtímaaxtir} + z_t.$$



Metin frávik



Mynd: Metin frávik



Metin frávik eru sýnd á mynd 3. Á myndinni virðist einhvers konar sveifla vera í gangi auk þess sem bólan og hrunið eftir 2008 sjást greinilega. Það gengur heilmikið á í þessari röð og það er ekki ljóst af myndinni hvort maður á að álykta að þetta komi úr ósístæðu ferli, eða hvort einhver hagrænn kraftur virðist toga z_t niður í 0. Þess má geta að hvorki núllkenningu í ADF (núllkenning ósístæðni) né KPSS (núllkenning sístæðni) prófum er hafnað.

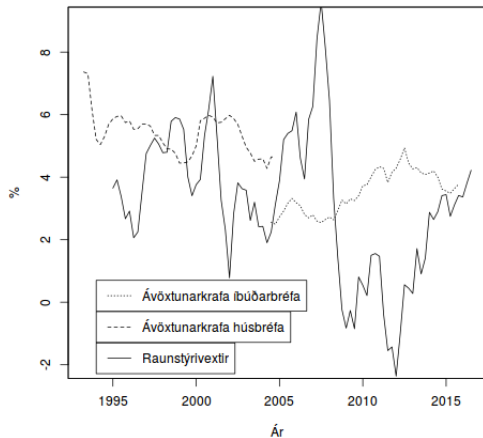


Það gefur tilefni til þess að skoða frávikið z_t sérstaklega, þ.e. meta ARMA líkan til að meta sveiflu og GARCH mynstur til að átta sig á spákaupmennsku. Metið var ARMA líkan fyrir z_t og síðan GARCH líkan fyrir frávikin úr því líkani. GARCH strúktúr virtist ekki vera til staðar.



Íslenskir vextir

Íslensk raunvaxtaþróun





Lokaorð

Hér hefur verið rakin ákveðin nálgun á hvernig nota megi tímaraðir til að takast á við ákveðna vísindalega spurningu. Núvirðingarformúlan virðist gefa einfalt svar við því hvernig skuli verðleggja greiðsluflæði. Það er hins vegar ekki augljóst hvernig mat á þeirri formúlu byggt á mælingum er framkvæmt. Skilgreining á breytum, mælitæknileg atriði og ekki síst eðli hreyfimyntursins eru grundvallar tækniatriði.



Auk þessu eru þau líkön sem vinna þarf með flókin í meðförum, þ.e. gæta þarf að reiknitækni við hámarkanir og aðrar aðgerðir sem grundvalla þarf ályktanir á. Þessi einfalda greining gefur í skyn að hugsanlega sé það ekki húskaupendum endilega hagstætt að vextir séu lágir. Lægri vextir þýðir fyrst og fremst hærri skuld. Hugsanleg villa sem ekki hefur verið nefnd hér er að það gæti verið að á tímaskeiðum hárra vaxta séu dýr hús einfaldlega ekki í viðskiptum og rati því ekki inn í vísitölur. Þetta er enn ein áskorunin sem vísitölufraeðingar þurfa að fást við. Hér var unnið með mjög gróf gögn, aðeins tvo ekkert vel ákvarðaða punkta á vaxtarófinu.



Eftir 2003-2004 hefst bóla í fasteignaverði í Danmörku og á Íslandi. Vextir voru lækkandi og í Danmörku þá ruddust inn á markaðinn afborgunarlaus lán og íbúðarkaupendur þurftu aðeins að borga vexti fyrstu 10 árin. Hugsanlega gætu þeir endurfjármagnað með öðru afborgunarlausu láni eftir 10 ár og frestað enn afborgunum. Góðir spá menn hefðu hugsanlega geta áætlað hversu mikið stærra C úr formúlunni kaupendur hefðu til umráða og þannig fengið mat á áhrifunum á íbúðarverð. Íslenska spávandamálið var erfiðara.



Ef einstaklingur hefði verið beðinn að spá þróun íbúðaverðs á Íslandi ári 2003 þá hefði viðkomandi þurft að sjá fyrir að húsbrefakerfið yrði aflagt, 90% lánum lofað, íbúðalánabréfin tækju við, innlendir bankar yrðu virkir á markaði og að lán í erlendri mynt myndu hellast yfir kerfið. Fyrir tölfræðileg líkön er þetta **alger forsendubrestur**. Í báðum löndum virðist verðlagningarformúlan vera að gera eitthvað. Lægri vextir hafa áhrif til hækkunar á verði eigna.



Box, G. E. P. & Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden Day, San Fransisco.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedacity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, 50, 987–1007.

Granger, C. (1983). *Forecasting white noise*, in, *Applied Time Series Analysis of Economic Data, Proceedings of the Conference on Applied Time Series Analysis of Economic Data (October 1981)*, Editor. A. Zellner. U.S. Government Printing Office.

Granger, C. W. J. & Engle, R. F. (1987).
Co-integration and error-correction:
Representation, estimation and testing.
Econometrica, 55, 251–276.

Kelley, W. G. & Peterson, A. C. (1991). *Difference Equations*. Academic Press, London.

Kreyszig, E. (1999). *Advanced Engineering Mathematics* (8 ed.). John Wiley & Sons.
Linear fractional transformation, page 692.

Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series* (3 ed.). John Wiley & Sons.