Þjóðarspegillinn 2022
Framsetning fylgnifylkja

Helgi Tómasson
helgito@hi.is

28-10-2022

Skipulag fyrirlestrar

- Hvað er fylgnistuðull? Afhverki er hann minni en 1?
- Fylki fylgnistuðla
- Tölulegar aðferðir, Choleski og Givens
- Hagnýtingar, CAPM, þáttagreining (factor-analysis)
- Uppsetning R-pakka
- Lokaorð

Hvað er fylgnistuðull?

- Rúmfræðilegt hugtak, tengsl innfeldis og lengdar:

  $$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \cos(\theta)\, ||\boldsymbol{u}||\, ||\boldsymbol{v}||,$$

  þ.e. fylgnin er kósínus af horni milli vektoranna (ójafna Cauchy-Schwarz). Ef hornið er 0 eru vektorarnir samsíða. Stærðin $\rho = \cos(\theta)$ mælir því línuleg tengsl vektora.

- Líkindafræðilegt hugtak:

  $$E(X_1 - \mu_1)(X_2 - \mu_2) = Cov(X_1, X_2) = \rho\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(X_2)},$$

  þ.e. fylgnistuðull er skalaður cóvaríans.

- Á fylkjaformi:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} V(X_1) & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_1,X_2) & V(X_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}}_{Cor} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}}$$

- Auðvelt að fjölga víddum, covarians-fylki=margfeldi staðalfrávika og fylgnifylkis.
- $-1 \leq \rho = \cos(\theta) \leq 1$ eða $-\pi \leq \theta \leq \pi$.
- Í mörgum víddum eru flóknar þvinganir á hvernig fylgnistuðlar (og $\boldsymbol{Q}$ fyklið) geta verið.
- Fylkið, Σ, hefur þann eiginleika að $\det(\Sigma) \geq 0$.
- Hugsanlegt að skrifa fylgnifylkið sem fall af mörgum hornum, sbr. tilfellið einn fylgnistuðull.

Þáttun fylgnifylkis

- Pósitív-(semi)-definite fylki má t.d. þátta með Choleski-þáttun og skrifa sem $\boldsymbol{LL'}$.
- Með því að skoða Choleski-algoritmann þegar honum er beitt á fylgnifylki má sjá að fylgni stuðlarnir eru skrifaðir sem pólhnit (polar-co-ordinates).
- Þ.e. $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{\phi})$, þar sem ϕ er vektor af hornum:

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{matrix} \phi_{21} & & & & \\ \phi_{31} & \phi_{32} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \phi_{n,1} & \cdots & \cdots & \cdots & \phi_{n,n-1} \end{matrix}$$

- Ef fylgnifylkið er $n \times n$ er fjöldi horna $(n-1)n/2$. Hér mega hornin vera á bilinu $(0, \pi)$.

$$\Sigma = \boldsymbol{\sigma}\, Cor \boldsymbol{\sigma}, \text{ þar sem } \boldsymbol{\sigma} \text{ kvaðratrót af hornalínu } \Sigma.$$

Ef öll staðalfrávik eru 1 er Σ fylgnifylki.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}'$$

Í tvívídd gildir:

$$Cor = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Choleski þáttun $Cor = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}'$, $\boldsymbol{L}$ er neðra þríhyrningsfylki.

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{bmatrix}.$$

Ef $\rho = \cos(\phi)$, er fylkið $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(\phi)$ á forminu:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\phi) & \sin(\phi) \end{bmatrix}.$$

Útvíkkun í n víddir

$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(\phi_1, \ldots, \phi_{n(n-1)/2})$. Ein hugmynd er:

$$l_{ij} = \begin{cases} \cos(\phi_{ij}) \prod_{k=1}^{j-1} \sin(\phi_{ik}), & j = 1, \ldots i-1, \\ \prod_{k=1}^{j-1} \sin(\phi_{ik}), & j = i, \end{cases}$$

- Auðvelt að andhverfa, þ.e. ef fylgnifylki er þekkt að finna hornin:

$$\phi_{ij} = \arccos\left[\frac{l_{ij}}{\sqrt{\sum_{k=j}^{i} l_{ik}^2}}\right].$$

- Auðvelt að diffra:

$$\frac{\partial l_{ij}}{\partial \phi_{im}} = l_{ij} / \tan(\phi_{im}), \quad \text{for } m > j,$$
$$-l_{ij} \tan(\phi_{im}), \quad \text{for } m = j.$$

Hugleiðingar

- Fylkið má ekki vera singular (eða næstum singular).
- Sum hornin verða illa metin.
- Ef einhver $\phi_{ij} = 0$ þá verður afgangurinn af þeirri línu unidentified.
- Útkomur geta verið háðar því hvernig raðast inn í vektorinn.

Ný hugmynd

- Vil geta þvingað „reduced-rank" fylki, t.d. að fylkið sé „single-factor".
- Röðun inn í vektorinn á ekki að skipta máli.
- Trikk sem mér hefur dottið í hug er að nota singular-value-decomposition (SVD) og Givens-rotations. SVD er til fyrir öll fylki.
- SVD og Givens algormithmar eru mjög sniðug reiknitól.

- Pinheiro-Bates (m.a.) sýna t.d.:

$$\Sigma = U \Lambda U', \quad UU' = I,$$
$$U = G_1 G_2 \cdots G_{n(n-1)/2}, \quad \text{where}$$
$$G_i[j,k] = \begin{cases} \cos(\phi_i), & \text{if} \quad j = k = m_1(i) \\ & \quad \text{or } j = k = m_2(i) \\ \sin(\phi_i), & \text{if} \quad j = m_1(i), k = m_2(i) \\ -\sin(\phi_i), & \text{if} \quad j = m_2(i), k = m_1(i) \\ 1, & \text{if} \quad j = k \neq m_1(i) \\ & \quad \text{and } j = k \neq m_2(i) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$m_1(i) < m_2(i)$ heildtölur sem taka gildi á bilinu $(1, \dots, n)$ og $i = m_2(i) - m_1(i) + (m_1(i) - 1)(n - m_1(i)/2)$.

- Þessari vörpun má andhverfa, sum ϕ_i's eru á bilinu $(-\pi, \pi)$ $(\phi_{i+1,i})$ og önnur á bilinu $(-\pi/2, \pi/2)$.
- Auðvelt að diffra.

$$
\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ \phi_{21} & x & x & x & x \\ \phi_{31} & \phi_{32} & x & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \phi_{n,n-1} \end{bmatrix}
$$

Svipað og Choleski þáttun.

- Ef engin tvö singular gildi (λ_i) eru eins og fylkinu $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ er raðað í vaxandi röð eru U-fylkið unique nema hvað varðar formerki dálka. Ég hef ákveðið að $\det(U) = 1$ og að efsta línan frá staki 2 sé jákvæð.
- Auðveld að ákveða t.d. að einungis hluti af singular-gildunum sé jákvæður (hin 0). Þá ákveðinn þríhyrningur í fylkinu $\mathbf{\Phi}$ óákvarðaður. Þ.e. þau gildi má setja sem hvað sem er.
- Hægt að setja hliðarskilyrði um rank, fyrir t.d. factor-analysis, CAPM, og Bayes-aðferðir.
- Sennileikafall (normal) er á forminu:

$$-\frac{1}{2}\left[nd\log(2\pi) + nlog|\Sigma| + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i'\Sigma^{-1}\boldsymbol{x}_i\right]$$

Factor líkön

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_t &= \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{f}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t \\
V(\boldsymbol{r}_t) &= \boldsymbol{\beta}\Sigma_f\boldsymbol{\beta'} + \boldsymbol{D}
\end{aligned}
$$

- Factorar, $\boldsymbol{f}$ geta verið observable eða non-observable.
- Dæmi um single-factor model er til dæmis Sharpe-CAPM:

$$
r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{mt} + \varepsilon_{it}
$$

- Bayesistar vilja hugsanlega setja prior um fjölda factora eða um partial-fylgnistuðla (t.d. allir 0). T.d.

$$
E(\boldsymbol{Y}|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}} + \underbrace{\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}}_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}})
$$

James-Stein leikur

- Hér er metinn margvíður vektor. Sum hnit eru illa metin. Í lok ferlis er til staðar einhvers konar maximum-likelihood mat og tilheyrandi nákvæmni fylki $-H^{-1}$.
- Í pólhnitakerfinu mætti t.d. hugsa sér að:

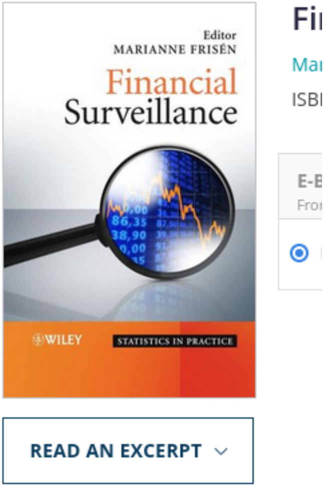
$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{JS} = (1 - \frac{(n-4)\bar{h}}{\|\pi/2 - \hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML}\|^2})(\hat{\boldsymbol{\theta}}_{ML} - \pi/2) + \pi/2$$

þar sem $\bar{h}$ er meðaltal hornalínu $-H^{-1}$.

Útúrdúr

Birti kafla í vöktunarbók(surveillance/change-point detection, structural-break) um líkanið:

$$dX = \kappa(\mu - X)dt + \sigma X^{\rho} dW$$



vakta κ, μ, σ og ρ

Boðsfyrirlestur til Bergen

$$\mathbf{y}^{(p)}(t) = A_1\mathbf{y}^{(p-1)}(t) + \cdots + A_p\mathbf{y}(t) + d\mathbf{W}(t) + B_1 d\mathbf{W}^{(2)}(t) + \cdots + B_q d\mathbf{W}^{(q+1)}(t),$$

$$V(d\mathbf{W}(t)d\mathbf{W}(t)') = \Sigma dt,$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \alpha_{11,i} & \alpha_{12,i} & \cdots & \alpha_{1d,i} \\ \alpha_{21,i} & \alpha_{22,i} & \cdots & \alpha_{2d,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{d1,i} & \cdots & \cdots & \alpha_{dd,i} \end{bmatrix}, \quad i = 1,\ldots,p,$$

$$B_j = \begin{bmatrix} \beta_{11,j} & \cdots & \cdots & \beta_{1d,j} \\ \beta_{21,j} & \cdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{d1,j} & \cdots & \cdots & \beta_{dd,j} \end{bmatrix}, \quad j = 1,\ldots,q.$$

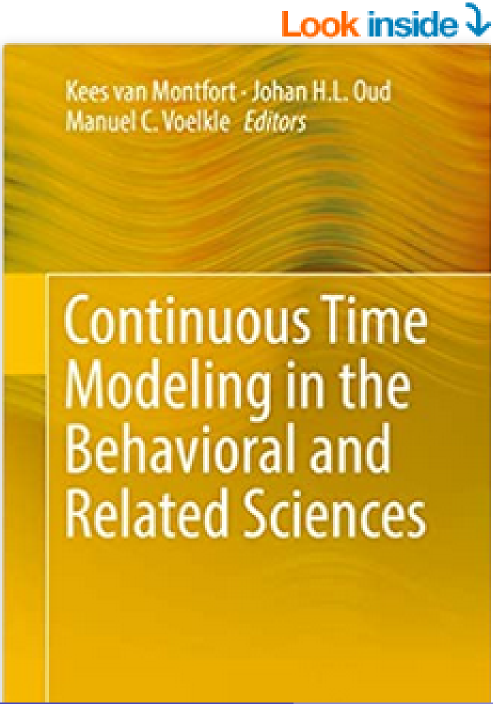
ARMA

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t), \quad \mathbf{C} \quad pd \times d \tag{15}$$

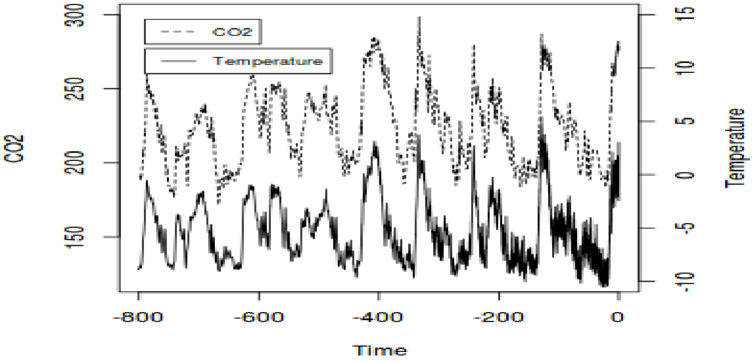
$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t)dt + \mathbf{R}d\mathbf{W}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} I_d \\ 0_d \\ \vdots \\ 0_d \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & I_{d\times d} & 0_{d\times d} & \cdots & \cdots & 0_{d\times d} \\ A_2 & 0_{d\times d} & I_{d\times d} & 0_{d\times d} & \cdots & 0_{d\times d} \\ \vdots & 0_{d\times d} & 0_{d\times d} & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{p-1} & 0_{d\times d} & 0_{d\times d} & \cdots & \cdots & I_{d\times d} \\ A_p & 0_{d\times d} & 0_{d\times d} & \cdots & \cdots & 0_{d\times d} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} B_q \\ \vdots \\ B_1 \\ I_{d\times d} \end{bmatrix}.$$

State-space


Look inside
Kees van Montfort · Johan H.L. Oud
Manuel C. Voelkle Editors
Continuous Time Modeling in the Behavioral and Related Sciences

Hiti og CO_2 í 800.000 ár



Lokaorð og hagnýtingar

- Þegar fylgnifylki/cóvaríans fylki eru stór er erfitt að giska á leyfileg gildi á stuðlum.
- Það að setja tengslin fram með hornum er tryggt að ágiskun á hornin gefur löglegt fylki.
- Auðvelt setja fram prior ágiskanir og leyfa lítil frávik frá þeim.
- Ýmsar aðrar aðferðir koma til greina, t.d. nota matrix-exponent af symmetrísku fylki. Sú útkoma verður alltaf pósitív definite. (Pinheiro-Bates 1996), Nýleg útfærsla hjá R. Hansen (2021).
- Choleski þáttun e.t.v. auðveldara ef fylki er full-rank, Givens aðferðafræðin e.t.v. betri ef fylki ekki full-rank. Einnig virðist Givens-aðferðin vera ónæmari fyrir röðun í vektor.