Þjóðarspegillinn 2021
Hagnýting Markov líkana

Helgi Tómasson
helgito@hi.is

29-10-2021

Skipulag fyrirlestrar

- Forsaga: Hvað er Markov líkan? Hvernig var mín aðkoma?
- Hreyfimynstur og jafnvægisdreifing
- Einfalt dæmi í strjálum tíma: Tekjudreifing
- Útfærsla í samfelldum tíma, tekjudreifing, líftími farsóttar
- Flóknari líkön, stjrált eða samfellt ástand
- Staðan í nútímanum, operator-fræði, quant-econ
- Lokaorð

Markov líkön

- Líkindafræðileg líkön, byggja á að eingöngu takmörkuð fortíð skiptir máli.
- Fyrstu kynni af líkindadreifingu byggja á óháðum (einstdreifðum) hendingum.
- Hvernig á að tákna frávik frá þessu:
- Fyrsta skref að hugsa sér að tími skipti máli, þ.e., X_t og X_{t-1} háðar. Markov forsendan er t.d. á forminu:

$$f(X_t = x | X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \ldots) = f(X_t = x | X_{t-1} = x_{t-1})$$

f er þéttifall dreifingarinnar, náskylt er martingale hugtakið

$$E(X_t | X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \ldots) = E(X_t | X_{t-1} = x_{t-1})$$

- Höfum keðju X_t, þá hugsum við okkur að fyrir fall H gildi:

$$E(H(X_{t+1})|X_t = x) = P_t H(x),$$

P_t er kallað, *generator* fyrir keðjuna X_t. Homogen $P_t = P$.

$$E(H(X_{t+s})|X_t = x) = P^s H(x).$$

Einfalt dæmi

- Segjum að X_t geti bara tekið tvö gildi, 0 eða 1.
- Þá er P fylki:

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

  $P(X_t = 1 | X_{t-1} = 0) = \alpha$, o.s.frv. P er kallað tilfærslufylki (transition).
- Þetta má skrifa sem AR(1) líkan, $X_t = \mu + \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$. Varíans ε_t fall af X_{t-1}. Þ.e. hreyfimynstur slembin mismunajafna.
- Auðvelt að finna jafnvægisdreifingu, þ.e. þannig að jafnmargir verði í 0 milli tímabila. Hreyfimynstrið heldur dreifingu fastri. Sbr. tekjudreifingar.

- Jafnvægisdreifinguna má finna með því að reikna markgildið $\lim_{s\to\infty} P^s$, eða með því að reikna eiginvektor adjoint-operatorsins, P^T, svarandi til eigingildisins 1. Þ.e. í strjál-tíma/strjált-ástands tilfellinu er eiginvektor bylta fylkisins.

$$\beta/(\alpha+\beta), \alpha/(\alpha+\beta).$$

- Hvernig er teorían ef tími og ástand er samfellt?

Samfelldur tími

- Þekkjum vel samfelldur tími og strjált ástand, survival/transition-data.
- Skoðum „conditional-expectation" operator (virkja).

$$P(s)H(x) = E(H(X(t+s)|X(t)=x), \quad P(r+s) = P(r)P(s).$$

- Skilgreinum generator ferlis:

$$\Lambda = \lim_{s \downarrow 0} \frac{P(s) - I}{s}$$

- Jafnvægisdreifing (ef til er) mun vera eiginfall (eiginvektor) adjoint-operatorsins Λ^T. Aðrar leiðir að útleiðslu jafnvægis geta verið greiðfærari.

Tekjudreifingardæmi Whittle/Wold

- Látum $n(x, t)$ vera ónormalíserað þéttifall fólks með tekjur x á tíma t. Gerum ráð fyrir að auður vaxi með hraðanum β. Lífshætta auðhafans er γ, (föst lífshætta, exponential-dreifing). Hver auðhafi hefur m afkomendur. Ævilengdin er eina uppspretta dreifingar (ójöfnuðar). $H(x)$ er virði (utility) x. Þá er generatorinn að gera eftirfarandi:

$$\Lambda H(x) = \beta x H'(x) + \gamma(mH(x/m) - H(x)) \text{ og þar með}$$

$$\Lambda^T n(x, t) = -\beta \frac{\partial}{\partial x}[xn(x, t)] - \gamma n(x, t) + \gamma m^2 n(mx, t)$$

jafnvægisdreifing fæst með því að leysa hlutafleiðujöfnuna:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \Lambda^T n(x, t)$$

- Lausn er:

$$n(x,t) \propto x^{-\alpha-1} \exp(\gamma(m-1)t)$$
$$\alpha\beta/\gamma = m(1-m^{-\alpha}).$$

  þ.e. $x^{-\alpha-1}$ sýnir að dreifingin í tekjum er Pareto.
- Þ.e. Ein uppspretta dreifingar (ójöfnuðar) er ævilengd en tekjudreifing er Pareto.
- Gini-stuðull Pareto-dreifingar er: $G = 1/(2\alpha-1)$. Þ.e. flókið fall af lífshættu, vöxtum og fjölda erfingja.
- Dæmið breytist heilmikið ef t.d. fjöldi erfingja er random stærð.

- Alls konar gagnrýni og viðbætur.
- Hvað með alla sem eru með 0 eignir og þar með engar tekjur.
- Leyfa tvenns konar tekjur.
- Gini-stuðlar eiga aðeins við breytur þar sem tekjur/eignir eru pósitívar (og bounded frá 0).
- Svakaleg della hjá mörgum sem blanda saman neikvæðum og jákvæðum tekjum.
- Hefðbundnir makróhagfræðingar ekkert mjög hrifnir.

- Fyrir diffusion-prócessa:

$$dX = a(X)dt + b(X)dW$$

gildir:

$$\Lambda = a(x)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}b(x)^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\right]^2$$

og um þéttifallið $f(x,t)$ gildir:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Lambda^T f = -\frac{\partial}{\partial x}[a(x)f] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b(x)^2 f].$$

Þessar jöfnur heita Kolmogorov-backward og Kolomogorov-forward. Jafnvægis dreifing fæst með því að leysa diffurjöfnuna $\Lambda^T f = 0$.

Faraldur/covid

- X eru ósýktir og Y eru sýktir. Hægt að hugsa sér generator:

  $$\Lambda H(x,y) = axy[H(x-1,y+1) - H(x,y)] + by[H(x,y-1) - H(x,y)]$$

- Stókastísk út gáfa af SIR-diffurjöfnu kerfi:

  $$dX = -aXY$$
  $$dY = aXY - bY$$

- Þetta er dæmi um kassalíkan, compartment models.SIR, SEIR, SEIRD, SVEIRD.Covid, malaría,hlaupabóla, o.s.frv.
- Gamaldags Markov-menn, finna eiginföll, Λ, Λ^T. til að áætla ýmsa líkinafræðilega eiginleika. Hvernig verður ástandið að lokum.

Dæmi um matsaðferðir

- Ef eigingildi operatorsins Λ er $\lambda(\theta)$, og $\phi(x, \theta)$ er eiginfall (eiginvektor). Þá er:

$$E(\phi(X(t), \theta)|X(t-\Delta))) = \exp(-\lambda(\theta)\Delta)\phi(X(t-\Delta), \theta)$$

- Set gögn, $x(t_i)$ og $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ inn leysi fyrir θ. Eins konar method-of-moment aðferð.
- Taylor útvíkka $f(x(t)|x(t-1)$ (eða $log(f)$ set inn í Kolmogorov forward jöfnu og hef hráefni í maximum-likelihood.
- T.d. $dX = -\theta tan(X) + dW$
- Þá er fyrsta eigingildi $\theta + 1/2$ og fyrsta eiginfall $\sin(x)$.

Hvað er nýjast?

- Ait-Sahalia, Hansen, Schenkman, skrifa um „operator methods for continuous-time Markov processes.
- Held að áhugi á virkjafræðum (operator-theory) sé vaxandi í hagrannsóknum og öðrum greinum, sbr. nýleg Nóbelsverðlaun í eðlisfræði.
- Númerískar aðferðir koma sterkt inn, sbr. quantecon.org.
- Dæmi af quantecon.org. Á að grípa til lockdown í covid? Hversu víðtækt og hve lengi? Hvað eiga sóttkvíar að vera stórar? Sjá dæmi 42. Modeling Shocks in COVID 19 with Stochastic Differential Equations, úr quantecon lectures.

Lokaorð

- Hugsunarháttur sem býður upp á tæknileg svör við mörgum spurningum.
- Hægt að blanda fræðilegum nálgunum og tölulegri tækni.
- Erfið söluvara þar sem sem margir sætti sig illa við líkindafræðilegar aðferðir.
- Markov nálganir henta ekki alltaf.