Hvað er state-space framsetning?

- Hugsum okkur diffurjöfnu:

  $$y'' + ay' + b = 0$$

  Ef við skilgreinum:

  $$z = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$$

  þá má skrifa diffurjöfnuna sem:

  $$z' - Az = 0 \quad \text{Hvernig er þá fylkið A?}$$

- Þ.e. einvíða annarar gráðu jöfnu má skrifa sem tvívíða fyrstu gráðu jöfnu. Þurfum því bara að hugsa um fyrstu gráðu jöfnur.

Tsay: kafli 11

- Skoðun jöfnur 11.1 og 11.2. Þ.e. local-trend-model. Hugsum okkur smá útvíkkun, random-walk með drift:

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \mu_t + \varepsilon_t, \quad V(\varepsilon_t) = \sigma^2_\varepsilon, \\
\mu_{t+1} &= \mu_t + \beta_t + \eta_t, \quad V(\eta_t) = \sigma^2_\eta, \\
\beta_{t+1} &= \beta_t + \xi_t, \quad V(\xi_t) = \sigma^2_\xi.
\end{aligned}
$$

  μ_t er level, β_t er drift.
- Vil t.d. skoða level á hitastigi í París og hugsanlega drift.

- Hugsum okkur mælingu y_t og ímyndum okkur að hún sé noisy-fall af ástandi $\boldsymbol{s_t}$. Ástandi lýtur einhverju dýnamísku lögmáli (sjá bls. 576).

$$\boldsymbol{s}_{t+1} = T_t\boldsymbol{s}_t + R\boldsymbol{\eta}_t, \quad V(\boldsymbol{\eta}_t) = Q_t.$$
$$y_t = Z_t\boldsymbol{s}_t + \varepsilon_t, \quad V(\varepsilon_t) = h_t.$$

- Ef gefin eru byrjunar gildi $\boldsymbol{s}_0$, má rekja sig í gegnum kerfið.
- Köllum $\boldsymbol{s}_{t+1|t}$, spáð ástand að gefnum upplýsingum fram að punkti t. Köllum $\boldsymbol{s}_{t|t}$, filtered, þ.e. besta mat á núverandi ástandi og $\boldsymbol{s}_{t|T}$, $t < T$, smoothed, þ.e. besta mat á sögunni gefið það sem gerðist.
- Kalman-filter algorithminn gefur reikingsaðferðir til að reikna þessar stærðir ef fyrir hendi eru mælingar á $y_t, \ldots, y_T$.

Nokkrar hagnýtingar

- Random-walk með breytilegri drift. Set:

$$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \sigma_\mu^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix}.$$

  Hér lýsir σ_μ, breytileika á stærð „innovations" í randomw-walk og σ_β breytileika í drift.Ef gögn eru fyrir hendi þarf að setja upphafságiskun á ástandi $\boldsymbol{s}_{0|0}$ vissu um gæði ágiskunarinnar, $P_{0|0}$. Stór hornalínugildi þýðir að lítið er vitað.
- Hægt að setja upp markfall, sum-of-squares, eða maximum-likelihood og meta upphafsgildin og σ_μ og σ_β.

- Regressions-líkan með breytilegum parametrum:

$$y_t = \alpha_t + \beta_t t + \varepsilon_t, \quad V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2.$$

Hér er ástandsvectorinn $\boldsymbol{s}_t' = (\alpha_t, \beta_t)$ og skilgreina má einhvers konar hreyfimynstur. T.d. að skurðpunktur og hallatala fylgi random-walk.

- Þá má t.d. velja:

$$T_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z_t = \begin{bmatrix} 1 & t \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 \end{bmatrix},$$

þ.e. ástandið, breytist með staðalfrávikum σ_α og σ_β.

- Ef Q-fylkið er 0 er kalman-filter, recursive-regression, þ.e. mat á föstu ástandi uppfært í hvert sinn sem ný mæling fæst.
- Í recursive regression eru normalíseraðar spáskekkjur, $v_t/f_t^{1/2}$, kallað recursive residuals, $\epsilon_t = v_t/f_t^{1/2}$. Summa þeirra frávika er ekki 0, en:

$$\sum_{t=1}^{T} \epsilon_t^2 = \sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2.$$

Sýniforrit

- Skoðið: `kalman-filter-level-trend.r`Það les skrána `paris.csv`. Mánaðarlegan meðalhita í París frá janúar 1757.
- Fallið `likl` reiknar minnsta-kvaðrat markfall fyrir random-walk með breytilegri trend. Ath. að til að losna við árstíðasveiflu er heppilegt að skoða t.d. janúar eða júlí sér.
- Hægt er að meta upphafsástand og breytileika ástands í tíma með t.d. `nlm(likl,param)`:

  ```
  param=nlm((likl,param)
  ```

  og keyra svo seinni hluta R-skráarinnar.

Recursív regression

- Hægt er að framkvæma skilyrta lágmörkum. T.d. þvinga breytaleika ástandins í 0.

```
param=param=nlminb(param,likl,lower=c(-50,-50,-100,-100),
upper=c(50,50,-99,-99))$par
```

- Þá fæst:

```
param
[1]   1.37569472   0.01248133 -99.00000000 -99.00000000
```

- Athugið að venjuleg regression á tímann gef67ur:

```
lm(yt~ttjan)

Call:
lm(formula = yt ~ ttjan)
(Intercept)        ttjan
    1.37569      0.01248
```

- Pastid skipanirnar frá línu 67 og keyrist Kalman-filter miðað við þessi gildi. Lokaátandið `at` er:

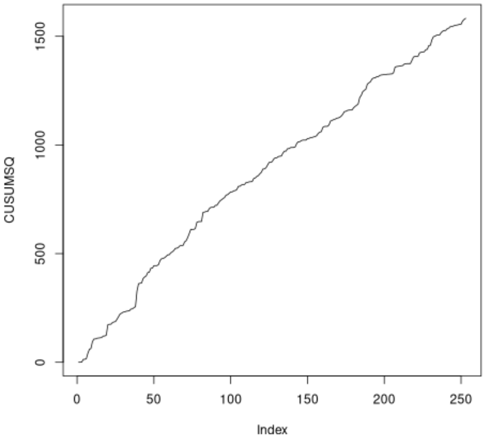
```
at
             [,1]
[1,] 4.53348417
[2,] 0.01248138
```

Takið eftir að driftið er nákvæmlega sama og úr regression, og lokaátandið er `4.53348417`, en `param[1]+253*param[2]`= 4.533471. Það voru 253 mælingar. Skoðum afgangsliði:

```
 m0=lm(yt~ttjan)
> sum(m0$residuals^2)
[1] 1582.654
> sum(vtx^2/Ftx)
[1] 1582.654
```

Lokaorð um state-space

- Recursívar spáskekkjur summerast ekki upp í 0. Kvaðratsumma þeirra er sú sama og OLS-residúala. Recursívur spáskekkur eru óháðar ef líkan rétt (og normaldreifing). Gagnlegir í vöktun, structural-break/change-point-detection o.s.frv. Skoða t.d. CUSUM og CUSUMSQ gröf.
- Hægt að setja mjög mörg dýnamísk líkön upp á state-space formi, t.d. einvíð og margvíð ARMA.



Mynd: CUSUMSQ rekúrsívir afgangsliðir París/janúar.