Spektral-teoría

Helgi Tómasson
helgito@hi.is

23. janúar 2024

Hvað er spektur?

- Spektur eru ný gleraugu til að horfa á sjálffylgnifall (og auto-covarince)
- Þetta er tíðnigreining þar sem breytileiki tímaraðar eru sundurliðaður niður á tíðni.
- Stærðfræðin í þessu er Fourier transform sem byggir á notkun þríhyrningafalla.
- Sendi kafla 6 úr Harvey: TSM. Mjög læsilegur kafli.

- Ef gefið er auto-covariance-fall, $\gamma(k)$ þá er spektral þéttifalli skilgreint sem:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}[\gamma(0) + \sum_{\tau=1}^{\infty} \gamma(\tau) cos(\tau\lambda)]$$

- Þ.e. auto-covariance fallinu er varpað yfir í annað fall sem við köllum spektur.
- Kunnið spektur fyrir, white-noise.
- Snyrtilegra er að nota komplexu framsetninguna í formúlu 1.4.
- Spektrala þéttifallið mælir breytileika og heildar varíans ferlis, $\gamma(0)$ fæst með því að integrera fallið frá $-\pi$ til π.
- λ er mælt í radían á tímaeiningu.

Upprifjun úr línulegri algebru

- Rifjið upp hvernig skipt eru um grunn.

$$x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2 + x_3 \boldsymbol{e}_3 + x_4 \boldsymbol{e}_4,$$

  þar sem $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, þ.e. venjulegur grunnur í 4-víður rúmi.
- Með því að nota Fourier-grunn mætti skrifa þetta sama sem:

$$\tilde{x}_1 \boldsymbol{f}_1 + \tilde{x}_2 \boldsymbol{f}_2 + \tilde{x}_4 \boldsymbol{f}_1 + \tilde{x}_4 \boldsymbol{f}_4$$

- Við köllum $\tilde{\boldsymbol{x}}$ discrete-fourier-transform af $\boldsymbol{x}$.
- $\boldsymbol{x}$ er skilgreint í tímarúmi en $\tilde{\boldsymbol{x}}$ í tíðnirúmi.
- Þetta eru bæði hornréttir grunnar. x-in hafa sjálffylgni en $\tilde{x}$ hafa misdreifni.
- Í tíðni rúminu sést hvaða tíðnir hafa mikinn varíans, þ.e. hverrnig sveiflur skýra mestan hluta breytileikans.

Spektral framsetning ferlis

- Hugsum okkur að:

$$y_t = ucos(\lambda t) + v\sin(\lambda t),$$
$$E(u) = E(v) = 0, \quad V(u) = V(v) = \sigma^2, \quad E(uv) = 0.$$

- Þá má sjá að $E(y_t) = 0$, $V(y_t) = \sigma^2$ og $\gamma(\tau) = E(y_t y_{t-\tau}) = \sigma^2 cos(\lambda\tau)$
- Athugið að u og v eru random stærðir og ekki fall af t.
- Breytið dæminu þannig að við höfum J stykki af u og v, þannig að $V(u_j) = V(v_j) = \sigma_j^2$. u_j, v_j óháð innbyrðis.

$$y_t = \sum_{j=1}^{J} /u_j cos(\lambda_j t) + v_j \sin(\lambda_j t))$$

- Þá er breytileiki vegna tíðni λ_j, σ_j^2.

- Heildar breytileiki verður því $\sum_{j=1}^{J} \sigma_j^2$ og auto-covariance $\gamma(\tau) = \sum \sigma_j^2 cos(\lambda_j \tau)$.
- Heildarbreytileikinn hefur því verið sundurliðaður á J tíðnir. Þetta má bera saman við ANOVA töflur.
- Þetta má alhæfa fyrir samfelldar tíðnir, sbr. Cramer framsetninguna.

Spektur og ARMA ferlar

- Fyrir ARMA ferli:

$$\Phi(L)y_t = \Theta(L)\varepsilon_t$$

gildir að:

$$f_y(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|\Theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\Phi(e^{-i\lambda})|^2}$$
$$e^{a+ib} = e^a(cos(b) + i\sin(b)), \quad i = \sqrt{-1}$$

- Almennt um línuleg filter að ef:

$$y_t = \sum w_j x_{t-j}, \quad y_t = W(L)x_t,$$
$$f_y(\lambda) = |W(e^{-i\lambda})|^2 f_x(\lambda)$$

Spurious cycle

- Nóbelsverðlaunahafinn Kuznetz taldi sig sjá 20 ára sveiflur í hagvexti.
- Hann rökstuddi mál sitt með því að sigta út skammtíma sveiflur með hlaupandi meðaltölum og diffrun yfir langt tímabil.
- Aðgerðirnar svöruðu til þess að vera með linear filter, þ.e. W fall sem sleppti í gegnum sig 20 ára sveiflum en dempaði margt annað. Sjá jöfnu 6.27. Teiknið upp það fall.

Að meta spektur

- Þegar mælingar eru gefnar kemur tvennt til greina.
    1. Þar sem formúlan fyrir spektur ARMA er þekkt má meta parametra ARMA líkans og setja inn i formúlu.
    2. Periodoggram gefur okkur mat, $\hat{f}$ í ákveðnum tíðnum.
- Periodogrammið er oft kallað úrtaksspektur. Sem random breyta er hún um það bil exponentialdreifð.
- Periodogram er ekki consistent estimator og því oft tekin meðaltöl yfir samliggjandi tíðnir. Sjá jöfnu 7.8.
- Mjög mörg trikk eru til við mat á spektral kúrfum.

Mat á parametrum t.d. ARMA líkans

- Sennileika fall fyrir ARMA er erfitt í reikningi (sjá jöfnur (1) og (2) úr fyrsta fyrirlestri) Reikningar geta verið tímafrekir.
- Spektral likelihood nálgunin sem lýst er í kafla 6.8 getur sparað reiknitíma. Þ.e. úrtaksspektrið regressað á þekkt fallform.
- Spektral-likelihood nálgunin er stundum kölluð Whittle-likelihood.

Margvíðar raðir

- Cross-correlogram er runa af fylkjum.
- Því dugar einfalda myndræna nálgun BJ verr.
- BJ lögðu til „transfer-function" þar sem vitað er hvor röðin er input.
- Margvíða spektral fallið:

$$\boldsymbol{F}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\Gamma}(\tau) e^{-i\lambda\tau}, \quad \pi < \lambda < \pi,$$

  er complex fylkjafall þar sem hornalínan er spektral fall hverrar hnitar.
- Stökin utan hornalínu eru „cross-spectrum".
- Takið eftir hugtökunum, phase og coherence.