Hagfræðideild | **Helgi Tómasson**
Háskóli íslands | **Reiknifræði hagfræði og fjármála**
Vor 2010 | **Dæmablað 4**

Heimadæmi skilist til kennara fyrir 16. febrúar. Það á skila kóða sem keyrir og skilar outputi í tölvupósti á `helgito@hi.is`. Nota á gögn í skránni `gogn.dat`. Ekki á að þurfa nota neitt úr `COMPECON`-pakkanum. Tilgangur þessa forrits er að skilja hvað fram fer í ýmsum hagrannsóknarforritum. Einnig er gott að skila (hand)skrifuðu blaði með formúlum og útskýringu.

1. Skrifið Matlab-skipanir sem lesa inn skrána `gogn.dat.` Kallið fyrri dálkinn y og seinni dálkinn x.

2. Setjið upp og metið eftirfarandi regression:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

   Hér er heppilegt að skrifa þetta á vektor-formi:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

3. Gerum ráð fyrir að $y_i|x_i$ hafi fengist sem mælingar á random breytu Y_i með líkindamassafall (probability mass function, tilsvarandi þéttifalli, density function fyrir samfelldar hendingar):

$$P(Y_i = 1|x_i) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_i}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_i}}$$
$$f(y_i|x_i) = p_i^{y_i}(1-p)^{1-y_i}, \quad p_i = P(Y_i = 1|x_i)$$

   Skrifið niður log-likelihood-fallið. Hér er heppilegt skrifa $\beta_0 + \beta_1 x_i = \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}$, þar sem $\boldsymbol{x}_i' = (1 \quad x_i)$ og $\boldsymbol{\beta}' = (\beta_0 \quad \beta_1)$. Finnið fyrstu gráðu skilyrði sem leysa þarf við mat mesta sennileika (maximum-likelhood). Hér getur verið heppilegt að lesa sér til um fylkjadiffrun. Slíkar kaflar eru oft aftast í hagrannsóknarbókum en einnig má lesa um það á t.d. http://www.ee.ic.ac.uk/hp/staff/dmb/matrix/calculus.html (google matrix calculus). Finnið aðra afleiðu (Hessian-fylki) log-likelihood fallsins.

4. Skrifið Matlab-fall, `loglikelihood.m` sem reiknar a) gildi log-likelihood fallsins, b) fyrstu afleiðu (gradient) þess og c) aðra afleiðu.

5. Rökstyðjið val á byrjunargildum og skrifið Newton-algoritma sem hámarka log-likelihood fallið og finnur ML-mat á β_0 og β_1. Hér má prófa nokkrar útgáfur, t.d. eina sem notar aðra afleiðu, aðra sem notar bara fyrstu afleiðu. Notið síðan „skothelda"samanburðaraðferð til að vera viss um að niðurstaðan sé rétt.

6. Við skoðun á stærðum sem sveiflast í tíma þarf oft að athuga ýmis integröl. Spectral framsetning á $Wiener$-ferli er:

$$w(t) = w(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\lambda t) - 1}{i\lambda} dZ(\lambda),$$

þar sem $Z(\lambda)$ eru óháðar complex-normal með $E(Z) = 0$ og $V(Z(\lambda)) = E(Z(\lambda)\bar{Z}(\lambda)) = \sigma^2/(2\pi)$. Ef gefið er að $w(0) = 0$ þá má með þríhyrningafræði finna að:

$$V(w(t)) = 4\frac{\sigma^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - cos(\lambda t))}{\lambda^2} d\lambda$$

Veljið t.d. $\sigma = 1$ og reiknið þetta með númerískri aðferð fyrir nokkur gildi á t. Þetta integral má reikna með „residue-calculus". Hvort væri betra að nota t.d. reglu Simpson eða Gaussian quadrature hér?

7. Skoðið dæmi 5.6 (predator-prey diffurjöfnur) og 5.7 (verðlagning skuldabréfa) í bók.