Meira um Bayes og state-space

Helgi Tómasson
helgito@hi.is

13/20. febrúar 2024

Útvíkkun á krónukasti

- Líkanið er:

$$P(X=1)=\theta, \quad P(X_0)=(1-\theta), \quad \text{þ.e. } P(X)=\theta^X(1-\theta)^(1-X)$$
$$\text{prior: } \pi(\theta)=\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} \quad \text{beta prior}$$
$$\text{gögn fengin með random úrtaki, } n\text{, óháð köst}$$
$$x_1,\ldots,x_n \text{ mælingar á } X_1,\ldots,X_n$$
$$\text{posterior, priorxlikelihood}$$
$$\pi(\theta|x_1,\ldots,x_n)\propto L(\theta|x_1,\ldots,x_n)\pi(\theta)=$$
$$\theta^{n\bar{x}+a-1}(1-\theta)^{n(1-\bar{x})+b-1}=Beta(n\bar{x}+a,n(1-\bar{x})+b)$$

Flóknari líkön?

- Vissan um θ fór úr því að vera $beta(a, b)$ yfir í vera $beta(a^*.b^*)$
- Hvað óþekkti parameterinn er μ normaldreifingu? T.d. $N(\mu, 1)$.
- Segjum að priorinn sé normal:

$$\mu \sim N(\mu_0, \tau^2),$$

$$\text{gögnin eru fengin með random úrtaki, } x_1, \ldots, x_n$$

$$\text{likelihood er: } L(\mu|x_1, x_n) \propto \exp(-\frac{n}{2}(\bar{x} - \mu)^2)$$

$$\text{poster, priorxlikelihood,}$$

$$\pi(\mu_| x_1, \ldots, x_n) \propto \exp(-(\mu - m_0)^2/2\tau^2) \exp(-\frac{n}{2}(\bar{x} - \mu)^2)$$

- Með smá algerbru má sjá að posteriorinn er líka normal, með annað meðaltal og annan varíans. Upplýsingarnar hafa verið uppfærðar með gögnunum.

Normal líkan

- Líkan

$$\boldsymbol{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma), \quad \Sigma \text{ þekkt, prior}$$
$$\boldsymbol{\mu} \sim N(\mu_0, \Sigma_0)$$
$$\text{random úrtak}$$
$$x_1, \ldots, x_n$$
$$\text{posterior}$$
$$\boldsymbol{\mu}|\boldsymbol{x} \sim N(\text{blanda af } \bar{x} \text{ og } \mu_0, (\Sigma_0^{-1} + n\Sigma^{-1})^{-1})$$

Útvíkkanir

- Upplýsingarnar felast í posteriornum. Formúlan bara aðgengileg í einföldum tilfellum.
- Nútímamaðurinn býr til líkindafræðilegan mekanisma sem býður upp á að simulera posteriorinn og taka úrtak úr honum.
- Þessir mekanismar byggja á líkindafræði um Markov-keðjur. MCMC hermanir, t.d. Gibbs (sem menn reyna oftast). Sjá dæmi í bók í kafla 12.

Markov-eiginleiki/Markov-keðjur

- Grunnatriði Markov-eiginleikans er að bara takmörkuð fortíð skiptir máli.
- Einfaldasta dæmið er að bara séu til tvö ástönd og í hverju tímaskrefi færist einhverjir á milli ástanda. Stundum er talað um tilfærslufylki, transition-matrix.
- Hugsum okkur tvo tekjuflokka L og H.

$$P(X_t = H | X_{t-1} = H) = 1 - \alpha$$
$$P(X_t = L | X_{t-1} = L) = 1 - \beta$$

- Þá er tilfræslufylkið, T,

$$T = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{bmatrix}$$

Nokkur atriði

- Er til jafnvægisdreifing?
- Já! (Má finna á ýmsa vegu)

$$T^{\infty} = \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{bmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

- Get fundið t.d. Gini-stuðul jafnvægisdreifingarinnar.
- Stundum (oftast) ekki gott að skrifa niður þægilega formúlu.

Útfærsla í state-space

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_t &= \boldsymbol{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad , \text{ mælijafna} \\
\boldsymbol{\alpha}_t &= \boldsymbol{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \boldsymbol{R}_t \boldsymbol{\eta}_t, \quad \text{ástandsjafna} \\
V(\boldsymbol{\varepsilon}_t) &= H_t, \quad V(\boldsymbol{\eta}_t) = Q_t.
\end{aligned}
$$

- Mjög mörg dýnamísk kerfi má setja fram á state-space formi.

Kalman-filter

$$\boldsymbol{P}_{t-1} = V(\boldsymbol{\alpha}_{t-1}), \quad \text{óvissa um ástand, tími } t-1$$

$$\boldsymbol{P}_{t|t-1} = T_t \boldsymbol{P}_{t-1} T_t' + \boldsymbol{R}_t Q \boldsymbol{R}_t' \text{ óvissa um spáð ástand gefið } t-1.$$

$$\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{\alpha}_{t|t} = \boldsymbol{a}_{t|t-1} + \boldsymbol{P}_{t|t-1} Z_t' F_t (\boldsymbol{y}_t - Z_t \boldsymbol{a}_{t|t-1}),$$

$$\boldsymbol{P}_t = \boldsymbol{P}_{t|t-1} - \boldsymbol{P}_{t|t-1} Z_t' F_t^{-1} Z_t \boldsymbol{P}_{t|t-1}$$

$$F_t = Z_t \boldsymbol{P}_{t|t-1} Z_t' + H_t \quad \text{Varíans spáskekkju.}$$