Long-memory líkön

Helgi Tómasson
helgito@hi.is

3. mars 2022

Hvað er short memory?

- Við kunnum fræðin um línulegar diffurjöfnur

$$\begin{aligned} dy &= y' = ay \quad \text{finnum fallið } y(t) \\ y(t) &= \exp(at)y(0)C. \end{aligned}$$

- Í tímaraðafræðum er samsvarandi AR(1), líkan:

$$\begin{aligned} \underset{-Y_{t-1}}{Y_t} &= \phi \underset{-Y_{t-1}}{Y_{t-1}} + \varepsilon_t, \\ \Delta Y_t &= (\phi - 1)Y_{t-1} + \varepsilon_t, \\ E(\varepsilon_t) &= 0, V(\varepsilon_t) = \sigma^2, E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, \text{ ef } t \neq s, \\ Y(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}. \end{aligned}$$

- Línulegar diffurjöfnur/mismunajöfnur, einkennast af „veldisminnkun" , ef $a < 1$, eða $\phi - 1 < 1$.
- Sjálffylgni í AR(1) er á forminu, ϕ^k. Þ.e.tengslin:

$$E(Y_t|Y_s)$$

  veikjast í veldistakti með vaxandi $|t - s|$.
- AR(1) í samfelldum tíma algerlega hliðstætt:

$$dY = aYdt + \sigma dW, \quad W(t) \text{ Wiener ferli},$$
$$Y(t) = \exp(at)Y(0) + \sigma \exp(at) \int_0^t \exp(-as)dW(s).$$

- Úvíkkast í margar víddir og flóknari sjálffylngistrúktúr, ARMA.

ARMA líkön

- Í strjálum tíma:

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

- og í samfelldum tíma:

$$Y(t) = \alpha_1 Y^{(1)}(t) + \cdots + \alpha_p Y^{(p)}(t) +$$
$$dW + \beta_1 W^{(2)}(t) + \cdots + \beta_q W^{(q+1)}(t).$$

Hér táknar $Y^{(j)}$ j-tu afleiðu. Þetta er að sjálfsögðu formlegt því $W(t)$ er ekki diffranlegt, hvað þá að til séu hærri afleiður. Þetta mál skilgreina rétt á state-space formi.

Spectral eiginleikar

- Það getur verið hentugt að vinna með operatora, L eða B, lag eða backward operator í stjrálum tíma og D diffur operator í samfelldum tíma.

$$LY_t = BY_t = Y_{t-1}, \quad DY(t) = Y'(t).$$

- Það er stundum hentugt að setja ARMA hreyfimynstur fram á margliðuformi:

$$\Phi(L)Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t, \quad \text{í strjálum tíma og}$$
$$A(D)Y(t) = B(D)dW(t), \quad \text{i samfelldum tíma.}$$

- Varíans af rétt sköluðu Fourier-transformi er kalla spectralfall og form spektralfalls ARMA ferlis er sérlega hentugt.

$$
\begin{aligned}
f_Y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|\Theta(\exp(i\omega))|^2}{|\Phi(\exp(i\omega)|^2|}, \quad \text{í strjálum tíma og} \\
f_Y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|B(i\omega)|^2}{|A(i\omega)|^2}, \quad \text{í samfelldum tíma.}
\end{aligned}
$$

- Þetta eru ræð föll (rational spectrum).

- Spectral fallið inniheldur allar upplýsingar um hreyfimynstur ARMA ferlisins og er jafngilt auto-covariance fallinu.
- Gagnlegur eiginleiki er að ef hreyfimynstur tveggja (óháðra) ferla er þekktur þá er auðvelt að leiða út hreyfimynstur summu þeirra.
- T.d. ef $Y_1(t)$ og $Y_2(t)$ eru óháðir AR(1) í samfelldum tíma:

$$dY_1(t) = \alpha_1 Y_1(t)dt + \sigma_1 dW_1(t) \text{ og}$$
$$dY_2(t) = \alpha_2 Y_1(t)dt + \sigma_2 dW_2(t),$$

- þá er:

$$f_{Y_1+Y_2}(\omega) = f_{Y_1}(\omega) + f_{Y_2}(\omega) =$$
$$\frac{\sigma_1^2}{2\pi}\frac{1}{\omega^2+\alpha_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2\pi}\frac{1}{\omega^2+\alpha_2^2}, \text{ þ.e. } ARMA(2,1).$$

ARIMA

- Ef margliðurnar $\Phi(z)$ eða $A(z)$ hafa ákveðnaeiginleika, rætur Φ utan einingahrings, eða rætur A með neikvæðan rauntöluhluta þá gildir að:

$$V(Y) = \int f(\omega)d\omega < \infty, \text{ integral yfir viðeigandi mörk},$$

  auto-covariance og spektralfallið bara fall af föstum parametrum, þ.e.ferli weakly-stationary.
- Grafísk skoðun ganga leiðir í ljós að ósennilegt er að undirliggjandi ferlar séu stationary.
- Fræg bók, Box & Jenkins (1976), lagði til að í stað þess að vinna með mælingar á Y_t beint, væri $\Delta^d Y_t = (1 - L)^d Y_t$ skoðað.
- Slík ferli voru kölluð ARIMA(p,d,q)
- Aðferðafræðin gengur m.a. út að skoða úrtaks ACF og PACF fyrir $\Delta^2 y_t$ og reyna síðan að giska á p, d, q. Miðað var við að prófa $d = 0, 1, 2, \ldots$

- Vitað er að fyrir random-walk, ARIMA(0,1,0) einkennsist ACF af beinni línu, en fyrir stationary ARMA(p,0,q) ferla einkennist ACF af að minnta kosti veldisminnkun.
- Er eitthvað til þarna á milli? Er brotdiffrun möguleg?
- Já. Maður getur skoðað binomial-útvíkunna á $(1-L)^d$, þar sem d er brot.

$$(1-L)^d Y_t = \varepsilon_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j},$$

$$\psi_j = \frac{d(1+d)\cdots(j-1+d)}{j!}.$$

- Svona Y_t hefur margliðu minnkun í ACF.
- Spectralfallið $f_Y(\omega)$ er ∞ fyrir $\omega = 0$, en ef $-1/2 < d < 1/2$ gildir að $V(Y_t) = \int f(\omega)d\omega < \infty$, þ.e. Y_t er stationary.

ARFIMA

- Hvernig datt mönnum þetta í hug?
- Vatnaverkfræðingur Hurst (1951) var að athuga flóðahæð í Níl í nokkrar aldir og tali sig sjá pólýnómial lækkun á ACF.
- Í random-walk í samfelldum tíma (Brown/Wiener-ferli) gildir að:

$$E(W(t)W(s)) = \sigma^2(t-s), \quad t > s > 0.$$

- Hugmynd Hurst var sett fram:

$$E(W_H(t)W_H(s)) = \sigma^2/2(t^{2H} + s^{2H} - (t-s)^{2H}), \quad t > s > 0.$$

- H er kallað Hurst exponent og $d = H - 1/2$.
- $W(t+1) - W(t)$ er kallað „white-noise", og ef W_H er normal-dreift er $W_H(t+1) - W_H(t)$ kallað „fractional Gaussian noise".

- Spectralfall ARIMA(p,d,q) er á forminu:

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \underbrace{|(1 - \exp(i\omega)|^{-2d}}_{long-memory} \frac{|\Theta(i\exp(\omega)|^2}{|\Phi(i\exp(\omega))|^2}$$

- ARFIMA(p,d,q) með $0 < d < 1/2$ hefur þann eiginleika að $f(0) = \infty$, $\int f(\omega) d\omega = VAR(Y(t))$ og auto-covariancar $\gamma(k)$
- Líkindafræðilega eru þetta ekki Markov margingales (ef $d < 1/2$).
- Tölfræðilegur vandi er að giska á d (og ϕ_i, θ_i og σ út frá mælingum.
- Vegna þess hve mælingar eru háðar verða ályktanir um t.d. meðaltal $\mu = E(Y(t))$ og þýðingu ytri stærða frábrugðnar hefðbundinni ályktanafræði.

Ýmsar útvíkkanir og hagnýtingar

- Baillie & Chung (2002) skoða árhringi úr trjám.
- Chan & Palma (1998) sýna state-space nálgun.
- Comte & Renault (1996) sýna hvernig megi skilgreina fractional W í samfelldum tíma í mörgum víddum.

Nokkur R forrit

- longmemo arfima artfima LongMemoryTS fracdiff, rugarch, forecast, garma, vgam, waveslim, tsvge, o.s.frv.
- garma=Gegenbauer-ARMA, Gegenbauer er ákveðin fjöldskylda af margliðum. Gegenbauer ARMA leyfir óendanlegt spectur í fleiri tíðnum en 0, t.d. vegna árstíða.

Að reikna spectral fall

- R-skipanir til að reikna spectral density fyrir ARFIMA(0,d,0).

```
 lam=0.2
d=0.3
sigmax=1
fspec=function(lam){return(sigmax*1/(2*pi)*
(2*abs(sin(lam/2)))^(-(2*d)))}
#
#
#  Úr Beran, 1994, bls. 63
```

- Með ljótri algebru má finna auto-covariance fallið. R skipanir:

```
 k=2
sigmax=1
gam=function(k){
return(sigmax*(-1)^k*gamma(1-2*d)/(gamma(k-d+1)*
gamma(1-k-d))
}
```

Spectral formúlur

- Ef Y_t hefur ákveðið spectral fall má reikna $V(Y_t)$, með formúlu 3.11 í spectal hefti:

```
  2*integrate(fspec,0.000001,pi)$value
[1] 1.316456
```

- Það má staðfesta að vormúlan fyrir auto-covariance-fallinu er rétt og reikna γ_0.

```
  gam(0)
[1] 1.316456
```

- Hvers vegna var integralið ekki frá 0?
- Forritið jöfnu 3.10 í hefti og reiknið t.d. $\gamma(1)$.

Baillie, R. & Chung, S.-K. (2002). Modeling and forecasting from trend-stationary long memory models with applications to climatology. *International Journal of Forecasting*, 18, 215–226.

Box, G. E. P. & Jenkins, G. M. (1976). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden Day, San Fransisco.

Chan, N. H. & Palma, W. (1998). State space modeling of long-memory processes. *The Annals of Statistics*, 26(2), 719–740.

Comte, F. & Renault, E. (1996). Long memory continuous time models. *Journal of Econometrics*, 73(1), 101–149.

Hurst, H. E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, 770–799.