Um sveiflur

- Segjum að við höfum tvívítt kerfi $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), X_2(t))'$, hreyfimynstrið er:

$$d\boldsymbol{X}(t) = A\boldsymbol{X}(t)dt + d\boldsymbol{W}(t), \quad V(d\boldsymbol{W}(t)) = \Sigma dt,$$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \lambda \\ -\lambda & \alpha \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}.$$

- Þetta er tvívíð línulegt „stókastískdiffurjafna. Lausnin, gefið $\boldsymbol{X}(t_0)$ er á formin:

$$\boldsymbol{X}(t) = \exp_M(A(t - t0))\boldsymbol{X}(t_0) + \text{ random þáttur}$$

- Hér er $\exp_M$ matrix-exponent,

$$\exp_M(At) = \underbrace{\exp(\alpha)}_{\delta} \begin{bmatrix} cos(\lambda t) & sin(\lambda t) \\ -sin(\lambda t) & cos(\lambda t) \end{bmatrix}$$

- Ef $t - t_0 = 1$ fæst það sem stendur í jöfnu 11.54 í bók.

Trend+cycle hiti í París

- Set upp trend+cycle, svipað og í kafla 11.3.5, sleppi season-lið. Scalar (einvítt líkan). State-space form:

$$
\begin{aligned}
y_t &= \mu_t + \bar{\omega}_t + \epsilon_t \quad \text{mælijafna} \\
\mu_{t+1} &= \mu_t + \beta_t + \eta_t, \quad \text{level (rw með drift)} \\
\beta_t &= \beta_{t-1} + \zeta_t, \quad \text{rw-drift}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{bmatrix} \bar{\omega}_{t+1} \\ \bar{\omega}^*_{t+1} \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} cos(\lambda) & sin(\lambda) \\ -sin(\lambda) & cos(\lambda) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\omega}_t \\ \bar{\omega}^*_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon^*_t \end{bmatrix}
$$

- Ástandsrúmið er 4-vítt, mælingin verður til með því að margfalda ástandsvectorinn með $Z = (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$.
- Forrita kafla 11.4 til að meta log-likelihood. Það er síðan hámarkað með númerískum aðferðum. Parametrarnir eru upphafsgildi ástandsvektorsins, breytileiki random-þátta og tíðni sveiflu. Gögnin mánaðarlegur meðalhiti í París, frá 1757 til 2009. $2\pi/\hat{\lambda} = 12$ og $\hat{\delta} = 1$.

- Hvað er market-microstructure?
- Viðskipti á markaði eiga sér stað á tilviljunarkenndum tímapuntkum.
- Hvernig er biðtími milli viðskipta?
- Nauðsynlegt að gera sér grein fyrir eðli biðtíma. Biðtími er aldrei neikvæður.
- Grunnviðmið er exponential-dreifingu, þ.e. nýliðinn biðtími gefur ekki vísbendingar um framtíðar biðtíma.

$$P(T < t) = 1 - \exp(-\lambda t), \quad f(t) = \lambda \exp(-\lambda t),$$
$$E(T) = 1/\lambda, \quad V(T) = 1/\lambda^2,$$
$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \lambda, \text{hazard fall.}$$

Aðrar biðtímadreifingar

- Exponential-dreifingin hefur constant hazard.
- Ein hugmynd er að setja
- Summa r óháðra einsdreifðra exponential er gammadreift, $gamma(r, \lambda)$. Hver er endingartími ljósaperukassa ef hver pera hefur exponential-dreifðan líftíma?
- Discrete útgáfur eru geometrísk-dreifing og negative-binomial.
- Ef biðtími eftir atburði er exponential, með $E(T) = 1/\lambda$, þá er fjöldi atburða í tímabili af length t, Poisson, með $E(N_t) = \lambda t$.
- Allar pósitívar dreifingar hafa túlkanlegt hazard-fall.

Líkindafræðileg líkön sem lýsa biðtíma eftir tilteknum atburði. Ef biðtíminn er slembibreyta sem táknuð er með T og þéttifalla og dreifall T eru táknuð með $f(t)$, $F(t)$ þá er hættunni lýst með hættu(*hazard*)-falli:

$$h(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

Einfaldasta hugsanlega viðmiðun er að hættan sé fasti, $h(t) = \lambda$. Föst áhætta svarar til þess að biðtíminn sé veldisdreifður (*exponential*). Einföld útvíkkun er að gera ráð fyrir að biðtíminn í einhverju veldi, T^α, sé veldisdreifður. Þá fæst dreifing sem kölluð er Weibull dreifing.

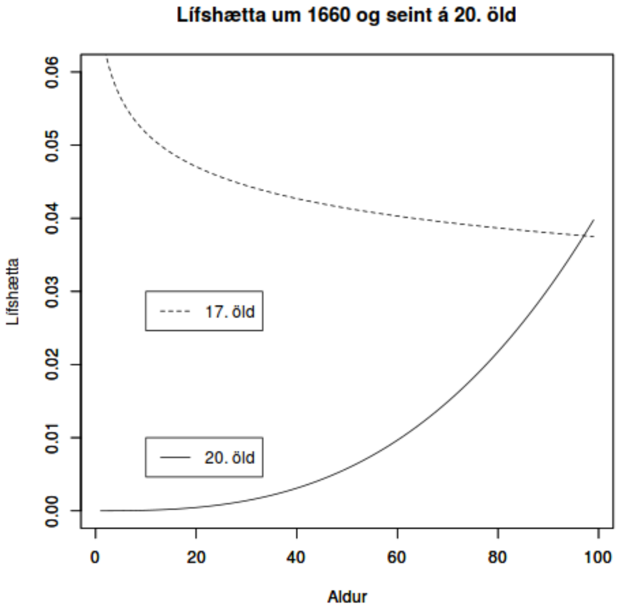
Um Weibull dreifingu gildir að:

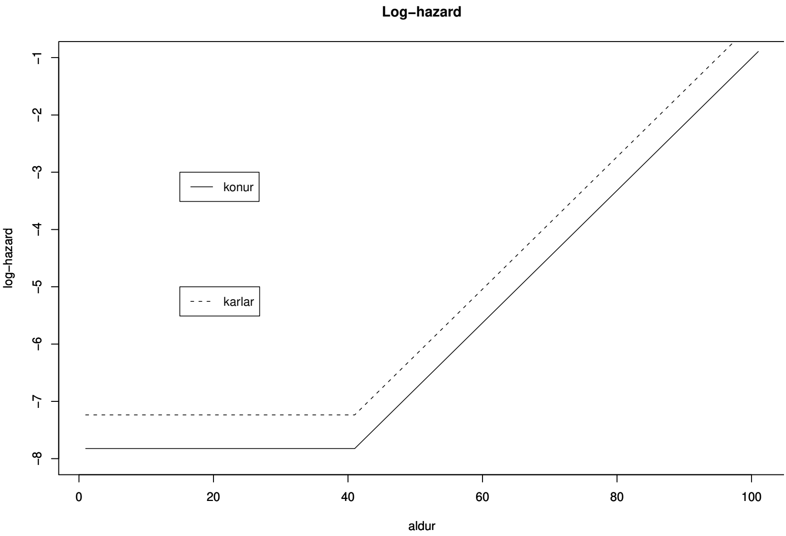
$$f(t) = \frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \exp(-(t/\lambda)^{\alpha}),$$
$$F(t) = 1 - \exp(-(t/\lambda)^{\alpha}),$$
$$h(t) = \alpha\lambda^{\alpha} t^{\alpha-1},$$
$$E(T) = \lambda\Gamma(1+1/\alpha), \quad V(T) = \lambda^2(\Gamma(1+2/\alpha) - (\Gamma(1+1/\alpha))^2).$$

Weibull dreifingin leyfir þróun, stöðugt vaxandi eða minnkandi á lífshættu í tíma. Önnur nálgun sem hentar vel til að lýsa lífshættu lífvera er Gompertz-Makeham útfærslan:

$$h(t) = \exp(\alpha + \beta t).$$

Ýmsir aðrir rithættir eru þekktir á Gompertz-Makeham nálguninni á lífshættu, t.d. $h(t) = \lambda + \alpha \exp(\beta t)$. Grunnhugmyndin er að framan ævi er lífshættan nálægt því að vera fasti, t.d. vegna slysa eða hættunnar á að verða étin af annari lífveru, en á seinni hluta ævinnar veldisvöxtur í lífshættu. Veldisvöxturinn gæti verið tilkominn vegna slits á tæknilegri uppbyggingu lífverunnar.


Lífshætta um 1660 og seint á 20. öld
Lífshætta
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
17. öld
20. öld
0
20
40
60
80
100
Aldur



Meðalævilengd karla 79 ár, meðal ævilengd kvenna 83 ár.

Háðar mælingar

- Koma biðtímarnir í gusum? Segja nýliðnir biðtímar eitthvað um hættuna á atburði?
- Í kafla 5 er þetta útfært með ACD. Non-trivial að útfæra ARMA hugmyndina fyrir jákvæðar stærðir.
- ACD=auto-regressive-conditional-duration:

$$x_i = \psi\epsilon_i, \quad E(\epsilon_i) = 1, \quad V(\epsilon_i) = 1,$$

$$\psi_i = \omega + \sum_{j=1}^{r} \gamma_j x_{i-j} + \sum_{j=1}^{s} \omega_j \psi_{i-j}, \text{ random intensity.}$$

Mjög svipað og ARCH í kafla 3

- Næstum upprunalega hugmyndin, ARCH(m):

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \epsilon_t \quad iid \quad E(\epsilon_t) = 0, \quad V(\epsilon_t) = 1,$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 a_{t-1}^2 + \cdots \alpha_m a_{t-m}^2.$$

- Mjög líkt AR líkani.Ýmsir áhugaverðir eiginleikar, breytileikinn kemur í gusum, hátt kurtosis, o.s.frv.
- Dreifing ϵ_t hefur mikið að segja um eiginleika y_t.

Útvíkkanir

- GARCH þekktast, einkonar ARMA útfærsla fyrir önnur veldi.

$$a_t = \sigma_t \epsilon_t, \quad \epsilon_t \quad iid \quad E(\epsilon_t) = 0, \quad V(\epsilon_t) = 1,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_j a_{t-j}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2.$$

- Mjög margar útvíkkanir til, IGARCH, AGARCH, EGARCH o.s.frv.
- GARCH-m gengur út á að breytileikinn hafi áhrif á spár. ARMA-GARCH tengir saman level (ARMA hreyfimynstur) og GARCH (breytileikastrúktúr).
- Berið saman við ACD. Hægt að ímynda sér að biðtími eftir viðskiptum hafi áhrif á verð.

- Hægt er að ímynda sér að breytileikinn fylgi long-memory.
- Berið saman dæmið í kafla 3.15.2 við market-microstructure umræðuna í kafla 5. T.d. dæmi 5.2.