

# Kalman-filter

Helgi Tómasson

30. október 2016

# Hvað er Kalman-filter?

- Aðferð sem samanstendur af nokkrum línulegum-algebru reglum.
- Þetta er forritunarvæn aðferð, þ.e. auðvelt að útfæra í forritunarmálum sem nota línulega algebru, R, PYTHON(PYLAB), JULIA, OCTAVE(SCILAB, MATLAB o.s.frv).
- Rökræðin byggir á endurtekinni notkun á reglu Bayes fyrir normal líkön.
- Hentar vel fyrir tímaraðalíkön.

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \text{ mælijafna,}$$
$$\boldsymbol{\alpha}_t = \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1} + \mathbf{R} \boldsymbol{\xi}_t,$$

tilfærslujafna, ástandsjaafna,

- $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$ ,  $V(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{H}_t$ . Þetta er mælinoise.
- $E(\boldsymbol{\xi}_t) = \mathbf{0}$ ,  $V(\boldsymbol{\xi}_t) = \mathbf{Q}_t$ .
- $\mathbf{T}_t$  er tilfærslufylki (*transition-matrix*).

- Á tíma  $t$  höfum viðmælingu  $\mathbf{y}_t$  og ómælt ástand  $\alpha_t$
- Spá um gildi  $\mathbf{y}_t$  á tíma  $t$  gefnar upplýsingar á tíma  $t - 1$  er táknað  $\mathbf{y}_{t|t-1}$ . Þetta eru kallað spá (*prediction*).
- Hliðstætt gildir um spá á ástandsvektornum  $\alpha_{t|t-1}$ .
- $\alpha_{t|t}$  táknar mat á ástandi á tíma  $t$  gefnar upplýsingar á tíma  $t$ . Þetta er kallað *filtered*.

# Hversu vel er ástandið þekkt?

- Notum  $P_{t|t-1}$  sem mat á óvissu um spá:

$$P_{t|t-1} = E(\alpha_t - \alpha_{t|t-1})(\alpha_t - \mathbf{h}\alpha_{t|t-1})'$$

og sem mat á óvissu ástands á tíma  $t$   
að gefnum upplýsingum á tíma  $t$

$$P_{t|t} = E(\alpha_t - \alpha_{t|t})(\alpha_t - \alpha_{t|t})'$$

$$\mathbf{y}_{t|t-1} = \mathbf{Z}_t \boldsymbol{\alpha}_{t|t-1}$$

$$\mathbf{F}_{t|t-1} = \mathbf{P}_{t|t-1} \mathbf{Z}_t \mathbf{P}_{t|t-1} + \mathbf{H}_t$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{t|t-1} = \mathbf{T}_t \boldsymbol{\alpha}_{t-1|t-1}$$

$$\mathbf{P}_{t|t-1} = \mathbf{T}_t \mathbf{P}_{t-1|t-1} \mathbf{T}_t' + \mathbf{R}_t \mathbf{Q}_t \mathbf{R}_t'$$

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t|t-1}$$

## Uppfærslujöfnur (*updating equations*)

$$\begin{aligned}\alpha_{t|t} &= \alpha_{t|t-1} + P_{t|t-1} Z_t F_t^{-1} v_t \\ P_{t|t} &= P_{t|t-1} - P_{t|t-1} Z_t F_t^{-1} Z_t' P_{t|t-1}\end{aligned}$$

- $\alpha_{t|T}$  þar sem  $T > t$  er kallað *smoothed*. Það er erfiðara að reikna *smoothed* en *filtered* og *predicted*.