

Dæmablað 5

Skilið dæmi 3 og 4 til dæmakennara 25.02.2013.

1. Gerið ráð fyrir að x_1, \dots, x_n séu iid úr dreifingu með þéttifall:

$$f(x|\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < \theta < \infty.$$

Leiðið út method-of-moment metil fyrir θ . Leiðið út ML metil fyrir θ .

2. X er slembibreyta sem hefur þéttifall, $f(x) = \theta \exp(-\theta x)$, þar sem $x > 0$ og $\theta > 0$. Finnið formúlur fyrir a) $E(X)$ og b) $E(X^2)$. Gerið ráð fyrir að x_1, \dots, x_n hafa fengist sem iid mælingar á X_1, \dots, X_n og leiðið út MM mat á θ sem notar a) og MM mat á θ sem notar b). Leiðið út MM mat á θ ef frávikin í a) og b) veða jafnt.
3. Hermið dæmið á undan í R eða töflureikni. Þ.e. þið búið til gögn, x_1, \dots, x_n og notið skilyrði a) og skilyrði b) til að giska á θ . Veljið vog-fylki til að veða saman útkomurnar í a) og b). Notið það fylki til að fá endurbætt mat á θ . Notið það bættu matið til að fá nýtt mat á θ . Notið það fylki til að giska á nýtt vog-fylki. Veljið fyrsta vog-fylkið $= I$. Skilið mm-matinu úr skrefi 2 og vog-fylkinu sem fæst með því að nota matið úr skrefi 2.
4. Framhald af GMM dæmi sem kynnt var í fyrirlestri. Dæmið er byggt á Hamilton: *Time Series Analysis*, 1994. Gert er ráð fyrir að random úrtak, Y_1, \dots, Y_T

úr t-dreifingu með k frígráður. Við viljum meta k . Eftirfarandi móment eru þekkt:

$$E(Y^2) = k/(k - 2), \quad (1)$$

$$E(Y^4) = 3k^2/((k - 2)(k - 4)). \quad (2)$$

Einfaldur MM-metill er fenginn með því að leysa jöfnu (1), $\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T y_i^2 = k/(k - 2)$ fyrir k . Jafna (2) er aðeins flóknari en lausn á henni gæfi aðeins annað mat á k . Hugmyndin með GMM er að veða saman úrtaksfrávikin í jöfnum (1) og (2). Hermið t-dreifð gögn og reiknið GMM metil. Takið eitt skref í áttina að „optimal choice of weighing matrix“. Það má benda á að með þessum mómentum er ekki vænlegt að meta k ef $k \leq 8$ (Hvers vegna?):

Nota má skjalið by-til-t-gogn.xls til að búa til gögn og gmm-solver.xls sem byrjun (þróið áfram og takið 2-3 skref í aðferðinni). Ég notaði solver í gnumeric-forritinu. Það er líka til í EXCEL). Reiknið \mathbf{S} fylkið og $\hat{\mathbf{W}} = \mathbf{S}^{-1}$, samanber ljósrit. Forritið sem ég sýni í fyrirlestri er gmm.r (Tölurnar í xls-skjalinu koma úr þessu forriti). Hægt er að bera útkomuna úr GMM saman vil ML mat. Þá þarf að nota að þéttifall t-dreifingar er:

$$f(x) = \frac{\Gamma((k + 1)/2)}{\Gamma(k/2)} \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{1}{(1 + x^2/k)^{(k+1)/2}}.$$