Svar við heimadæmi

16. október 2006

Punktar um heimadæmi

Dæmi 1.

a)-liður

G fallið fæst á eftirfarandi hátt:

$$F(x) = 1 - (x_0/x)^\alpha \quad 1 \le x_0 \le x \le \infty$$

$$f(x) = F'(x) = \alpha x_0^\alpha / x^{\alpha+1}$$

$$\mu = E(X) = \int_{x_0}^{\infty} x f(x) dx = \int_{x_0}^{\infty} x \alpha x_0^\alpha / x^{\alpha+1} =$$

$$\alpha x_0^\alpha \left[-\frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{x_0}^{\infty} = x_0 \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

$$G(x) = \frac{\alpha x_0^\alpha}{\mu} \left[-\frac{1}{(\alpha - 1)} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_{x_0}^{x} = x_0^{\alpha-1} \left(\frac{1}{x_0^{\alpha-1}} - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right) \quad x_0 < x$$

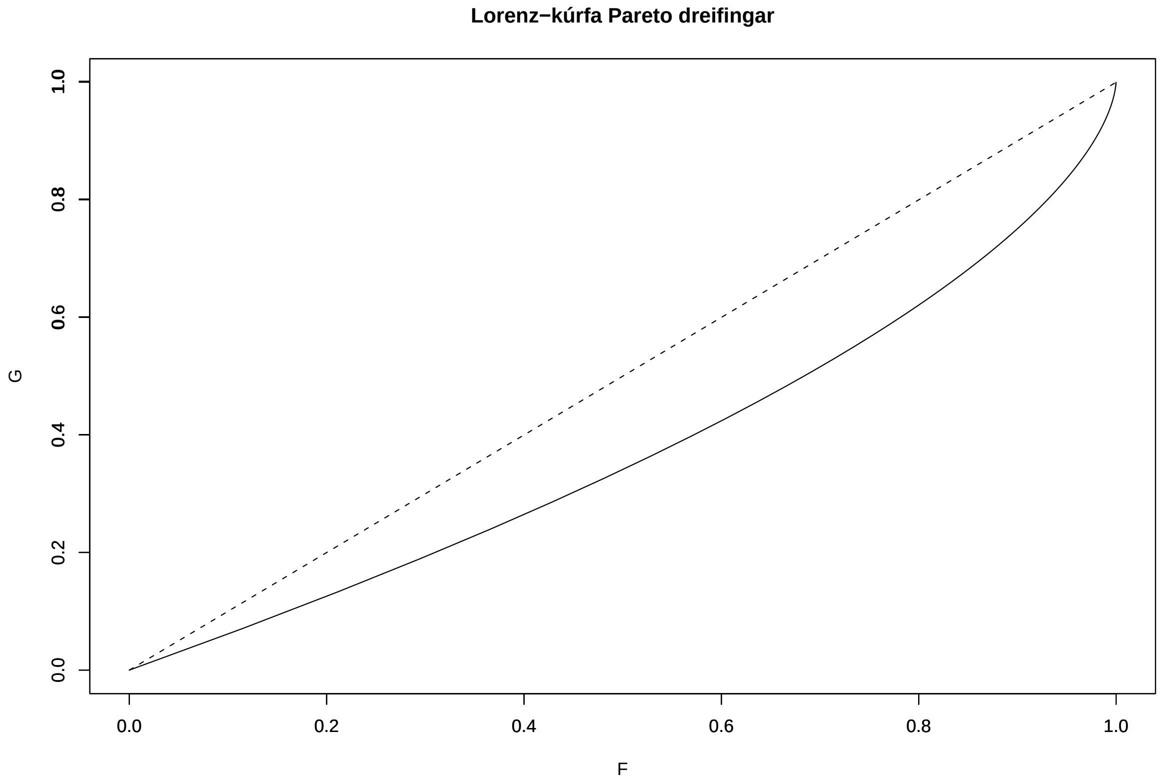
b)-liður

$$H_1(x) = 1 - F(x) = \begin{cases} \frac{x_0^\alpha}{x^\alpha} & \text{ef } x_0 < x \\ 1 & \text{ef } x < x_0 \end{cases}$$

$$H_2(x) = (1 - F(x))^2 = \begin{cases} \frac{x_0^{2\alpha}}{x^{2\alpha}} & \text{ef } x_0 < x \\ 1 & \text{ef } x < x_0 \end{cases}$$

$$\text{Gini} = 1 - \frac{\int_0^\infty H_2(x) dx}{\int_0^\infty H_1(x) dx} = \frac{1}{2\alpha - 1}$$

Mynd 1 sýnir Lorenz-kúrfuna í dæminu.



Mynd 1: Lorenz-kúrfa Pareto dreifingar.

c)-liður Hér verður:

$$H_1(x) = e^{-\lambda x}$$
$$H_2(x) = e^{-2\lambda x}$$

Þ.e. Gini=1/2

Almennt gildir að ef X_1 og X_2 eru óháðar og einsdreifðar þá er

$$\text{Gini} = \frac{E(|X_1 - X_2|)}{2E(X_1)}$$

Þ.e. gini-stuðullinn er hálfur relatívur meðalmunur. Annar hliðstæður og e.t.v. meira notaður mælikvarði er C.V. (coefficient-of-variation)

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}E(X_1 - X_2)^2}}{E(X_1)}$$

Aukaspurningar: Hver er Gini stuðull jafnrar dreifingar? Hver er besti Gini-stuðullinn?